Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (6 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez la matrice $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ définie par $/2$

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}\, 2^i\, j$$

Question 2. Donnez la forme trigonométrique de $/2$

- $z_1 = \left(3 \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{3}\right)^4$

- $z_2 = -5 - 5\sqrt{3}\,i$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soient les matrices suivantes /3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible :

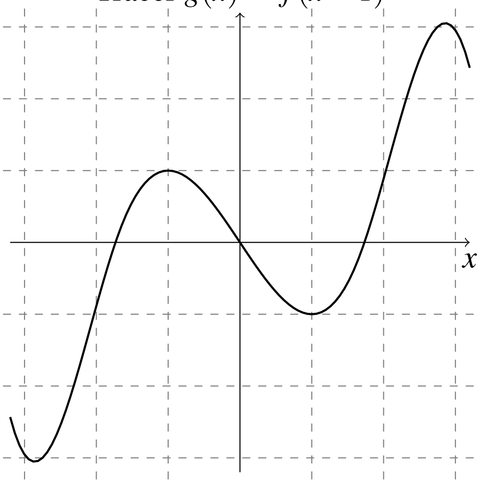
(a) $DB =$

(b) $CD =$

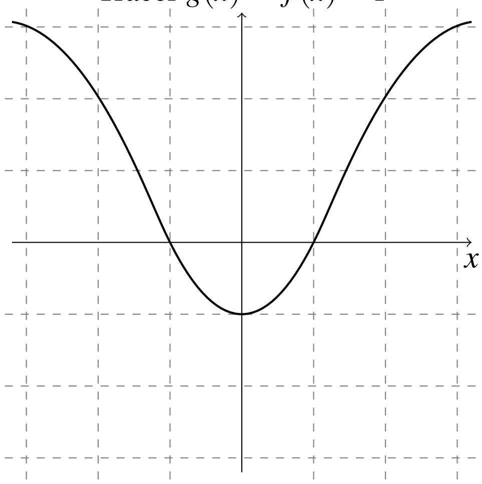
(c) $CB - 2A =$

Question 4. Pour chacun des graphes ci-dessous d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (à chaque fois différente), tracez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par la formule au dessus du graphe. /4

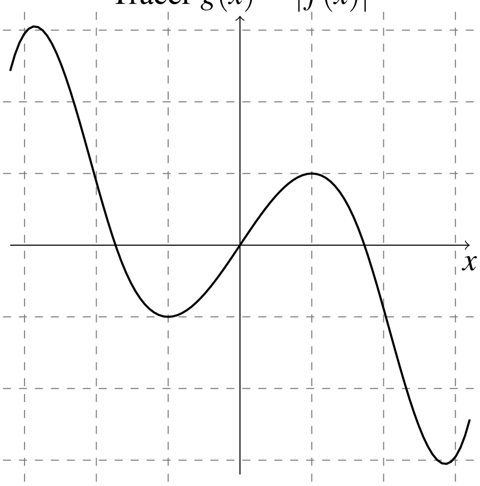
Tracer $g(x) = f(x-1)$



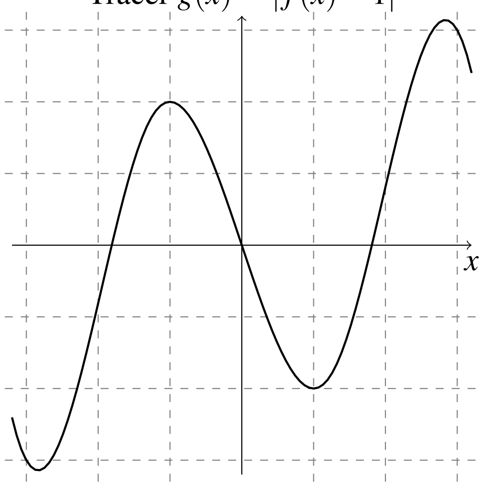
Tracer $g(x) = f(x) - 1$



Tracer $g(x) = |f(x)|$



Tracer $g(x) = |f(x) - 1|$



Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. /5

- Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) qui sont orthogonaux au vecteur $(2, 1, 3)$. Décrivez géométriquement cet ensemble.

- Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs $(2, 1, 3)$ et $(-1, 0, 5)$. Décrivez géométriquement cet ensemble.

Question 6. Écrivez l'ensemble $A_m := \{x \in \mathbb{R} \mid mx \geqslant 0\}$ comme une union disjointe d'intervalles. Discutez en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ si nécessaire. /3

Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 4 (6 octobre 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda \\ \frac{1}{2}x + \lambda y = \lambda - \frac{1}{2} \end{cases}$$

/5

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 8. Écrivez l'ensemble

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{5x^2-1}-2x} \leqslant \frac{5}{x} \right\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2008)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Prouvez par récurrence sur n ($n \geqslant 1$) que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, /4

$$(1+t+t^2+\cdots+t^n)(t-1) = t^{n+1}-1$$

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 10. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts.

(a) Faites un dessin commenté qui représente la construction géométrique de la somme $z_1 + z_2$ dans le plan complexe.

(b) Déduisez-en (justifier par une phrase en français en vous basant sur des résultats vus pendant vos études secondaire) que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

(c) Démontrez, en utilisant la définition du module d'un complexe, que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.