Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (6 octobre 2008) **Correction**

Question 1. *Donnez la matrice $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ définie par*

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}\, 2^i\, j$$

On a

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}2\cdot 1 & (-1)^{1+2}2\cdot 2 & (-1)^{1+3}2\cdot 3 & (-1)^{1+4}2\cdot 4 \\ (-1)^{2+1}2^2\cdot 1 & (-1)^{2+2}2^2\cdot 2 & (-1)^{2+3}2^2\cdot 3 & (-1)^{2+4}2^2\cdot 4 \\ (-1)^{3+1}2^3\cdot 1 & (-1)^{3+2}2^3\cdot 2 & (-1)^{3+3}2^3\cdot 3 & (-1)^{3+4}2^3\cdot 4 \\ (-1)^{4+1}2^4\cdot 1 & (-1)^{4+2}2^4\cdot 2 & (-1)^{4+3}2^4\cdot 3 & (-1)^{4+4}2^4\cdot 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 \\ -4 & 8 & -12 & 16 \\ 8 & -16 & 24 & -32 \\ -16 & 32 & -48 & 64 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 2. *Donnez la forme trigonométrique de*

- $z_1 = \left(3\,\text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)^4 = 3^4\left(\text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)^4 = 81\ \text{cis}\left(\dfrac{4(2\pi)}{3} \bmod 2\pi\right) = 81\ \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}$
- $z_2 = -5 - 5\sqrt{3}\boldsymbol{i} = 10\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right) = 10\,\text{cis}\,\dfrac{4\pi}{3}$

Question 3. *Soient les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez, si possible :

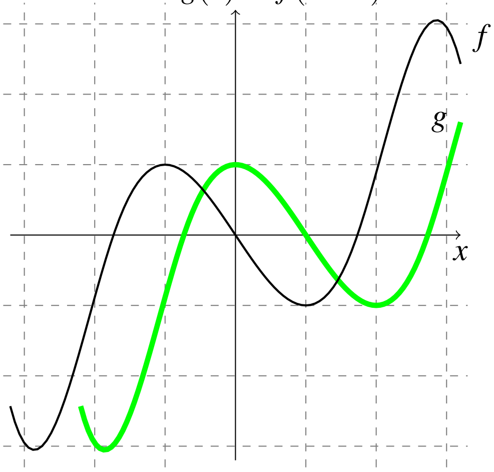
(a) $DB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 10 - 1\cdot 6 + 5\cdot 8 & 2\cdot(-4) - 1\cdot 3 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 14 \end{pmatrix}$

(b) CD ; impossible car le nombre de lignes de D n'est pas égal au nombre de colonnes de C.

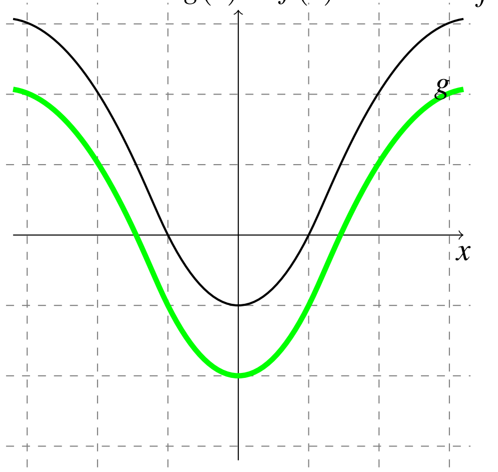
(c) $$\begin{aligned}
CB - 2A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10+12+56 & -4+6+35 \\ -10-12+24 & 4-6+15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 78-2 & 37-0 \\ 2+2 & 13-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 37 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 4. *Pour chacun des graphes ci-dessous d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (à chaque fois différente), tracez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par la formule au dessus du graphe.*

Tracer $g(x) = f(x-1)$

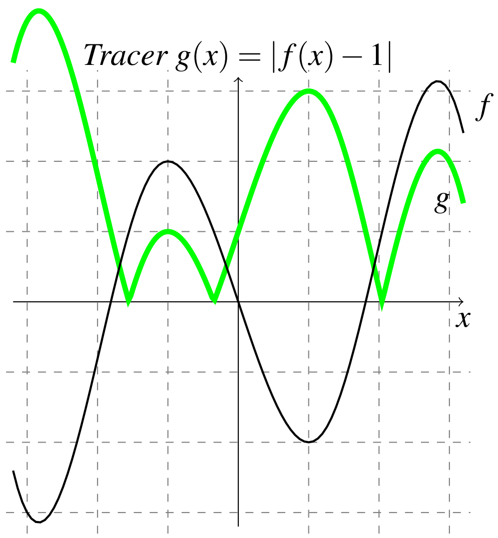


Tracer $g(x) = f(x) - 1$



Tracer $g(x) = |f(x)|$

Tracer $g(x) = |f(x) - 1|$



Question 5.

- *Recherchez l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) qui sont orthogonaux au vecteur $(2,1,3)$. Décrivez géométriquement cet ensemble.*

  Les vecteurs recherchés sont tels que $\big((x_1,x_2,x_3) \mid (2,1,3)\big) = 0$, c'est-à-dire $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$, c'est-à-dire $x_2 = -2x_1 - 3x_3$. On peut décrire l'ensemble de différentes façons :

  - sous forme cartésienne : l'ensemble recherché est $\{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$. Il s'agit du plan d'équation $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$. Ce plan passe par l'origine et a pour vecteur normal $(2,1,3)$.
  - sous forme paramétrique : l'ensemble recherché est $\{(\lambda, -2\lambda - 3\mu, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Il s'agit du plan dont une équation paramétrique est

    $$(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,-3,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

    Ce plan passe par l'origine du repère et a pour vecteurs directeurs $(1,-2,0)$ et $(0,-3,1)$.

- *Recherchez l'ensemble des vecteurs* (x_1, x_2, x_3) *qui sont orthogonaux à la fois aux vecteurs* $(2,1,3)$ *et* $(-1,0,5)$. *Décrivez géométriquement cet ensemble.*

  On a vu que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Ici, les vecteurs (x_1, x_2, x_3) sont donc tels que

  $$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \quad \text{et} \quad -x_1 + 5x_3 = 0.$$

  Nous sommes donc amenés à résoudre le système

  $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

  De la deuxième équation, on a $x_1 = 5x_3$ et en remplaçant dans la première, on trouve $x_2 = -13x_3$. L'ensemble recherché est donc

  $$\{(5\lambda, -13\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  Il s'agit de la droite dont une équation paramétrique est

  $$(x,y,z) = (5\lambda, -13\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Cette droite passe par $(0,0,0)$ et a pour vecteur directeur $(5,-13,1)$.

Question 6. *Écrivez l'ensemble* $A_m := \{x \in \mathbb{R} \mid mx \geqslant 0\}$ *comme une union disjointe d'intervalles. Discutez en fonction du paramètre* $m \in \mathbb{R}$ *si nécessaire.*

La question demande de déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $mx \geqslant 0$, en discutant si nécessaire en fonction de m. Comme on souhaite diviser les deux membres de l'inégalité par m, trois cas sont à envisager selon le signe de m :

- si $m > 0$: dans ce cas, l'inéquation $mx \geqslant 0$ devient $x \geqslant 0$. Donc $A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = [0, +\infty[$.
- si $m = 0$: l'inéquation $mx \geqslant 0$ devient $0 \geqslant 0$ qui est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \geqslant 0\} = \mathbb{R}$.
- si $m < 0$: dans ce cas, l'inéquation $mx \geqslant 0$ devient, après division par m des deux membres, $x \leqslant 0$. Donc $A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\} =]-\infty, 0]$.

Question 7. *Soit le système de deux équations à deux inconnues*

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda \\ \frac{1}{2}x + \lambda y = \lambda - \frac{1}{2} \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Calculons le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Il s'annule en $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$. Discutons sur λ :

- $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.
  Le déterminant est différent de 0. Le système possède une solution unique donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda - \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

  Donc l'ensemble des solutions est le singleton $\left\{\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)\right\}$. Géométriquement, les deux équations du système sont les équations de deux droites qui se coupent au point $\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.
- $\lambda = 1$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

  Regardons la proportionnalité des coefficients : coefficients de x : $\frac{1}{1/2} = 2$; coefficients de y : $\frac{2}{1} = 2$; termes indépendants : $\frac{1}{1/2} = 2$. Les deux équations sont donc les équations de deux droites confondues. La première équation dit que $x = 1 - 2y$. Donc l'ensemble des solutions est $\{(1 - 2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $\lambda = -1$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ \frac{1}{2}x - y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

  La proportionnalité des coefficients de x et y est la même ($\frac{-1}{1/2} = \frac{2}{-1} = -2$) tandis qu'elle est différente pour les termes indépendants ($\frac{-1}{-3/2} = \frac{2}{3}$). Les deux équations du système sont donc les équations de deux droites parallèles distinctes. Donc l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Question 8. *Écrivez l'ensemble*

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{5x^2-1}-2x} \leqslant \frac{5}{x}\right\}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est). Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.

CONDITIONS D'EXISTENCE : Pour que les membres de l'inéquation qui définit A aient un sens, il faut que x vérifie *simultanément* :

- $x \neq 0$ car il est au dénominateur d'une fraction ;
- $5x^2 - 1 \geqslant 0$ car on doit pouvoir prendre la racine carrée de $5x^2 - 1$;
- $\sqrt{5x^2-1} - 2x \neq 0$ car cette expression se trouve au dénominateur.

La seconde inéquation demande de voir quand le polynôme du second degré $5x^2 - 1$ est positif ou nul. Comme le coefficient de x^2 est positif, le tableau de signe est

		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$5x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

et donc $5x^2 - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1/\sqrt{5}] \cup [1/\sqrt{5}, +\infty[$. En ce qui concerne la troisième condition $\sqrt{5x^2-1} \neq 2x$ on remarque que,

- si $x < 0$, alors elle est forcément vérifiée car un nombre strictement négatif ($2x$) ne peut être égal à un nombre positif ou nul ($\sqrt{5x^2-1}$) ;
- si $x \geqslant 0$, alors elle est équivalente à $5x^2 - 1 \neq 4x^2$ (les deux membres étant positifs, on peut les élever au carré sans changer l'ensemble des solutions), c'est-à-dire $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Comme on ne s'intéresse qu'aux $x \geqslant 0$, il ne reste que la condition $x \neq 1$.

Les x qui vérifient les trois conditions simultanément appartiennent donc à (faites un dessin) :

$$]-\infty, -1/\sqrt{5}] \cup [1/\sqrt{5}, 1[\cup]1, +\infty[$$

RÉSOLUTION DE L'INÉQUATION : Pour supprimer les x au dénominateur du membre de droite, on va multiplier les deux membres par x. On va donc devoir discuter en fonction du signe de x. De même, on veut multiplier les deux membres par $\sqrt{5x^2-1} - 2x$. Il faut donc connaître le signe de cette expression. Pour cela, résolvons $\sqrt{5x^2-1} - 2x > 0$ (on peut refaire les « mêmes » calculs que pour $\sqrt{5x^2-1} - 2x < 0$), c'est-à-dire $\sqrt{5x^2-1} > 2x$. Comme pour $\sqrt{5x^2-1} = 2x$, on distingue deux cas :

- si $x < 0$, l'inéquation est vérifiée pour tout x car $2x < 0 \leqslant \sqrt{5x^2-1}$;
- si $x \geqslant 0$, les deux membres sont positifs et donc l'inéquation est équivalente à $5x^2 - 1 > 4x^2$, c'est-à-dire $x^2 > 1$, c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 1$. Comme on ne travaille qu'avec les $x \geqslant 0$, il ne reste que les $x > 1$ comme solutions.

En rassemblant la discussion précédente sous forme de tableau, on a (sans se préoccuper ici des conditions d'existence de $\sqrt{5x^2-1} - 2x$) :

		0		1	
$\sqrt{5x^2-1}-2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

On est donc amené aux trois cas suivants :

- si $x < 0$ alors on a la situation suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5x^2-1}-2x}}_{>0} \leqslant \underbrace{\frac{5}{x}}_{<0}$$

et donc l'inégalité n'est satisfaite pour aucun $x < 0$.

- si $x \in]0,1[$, alors on a la situation suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5x^2-1}-2x}}_{<0} \leqslant \underbrace{\frac{5}{x}}_{>0}$$

et donc l'inégalité est satisfaite pour tous les $x \in]0,1[$.

- si $x > 1$, alors on a la situation suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5x^2-1}-2x}}_{>0} \leqslant \underbrace{\frac{5}{x}}_{>0}$$

et, par conséquent, cette inégalité est équivalente à

$$\tfrac{1}{5}x \leqslant \sqrt{5x^2-1}-2x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underbrace{\tfrac{11}{5}x}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\sqrt{5x^2-1}}_{\geqslant 0}$$

Comme les deux membres sont positifs, on peut les élever au carré sans perdre ni gagner de solutions : $\frac{121}{25}x^2 \leqslant 5x^2-1$, c'est-à-dire $\frac{4}{25}x^2 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x^2 \geqslant \frac{25}{4}$ ou encore $x \leqslant -5/2$ ou $x \geqslant 5/2$. Comme ce cas ne s'intéresse qu'aux $x > 1$, il ne reste que les $x \geqslant 5/2$ qui sont solutions.

En rassemblant ces trois cas, on trouve que les solutions de l'inéquation de départ sont tous les x de $]0,1[$ ainsi que tous ceux de $[5/2,+\infty[$. En tenant compte des conditions d'existence, cela mène à

$$A = \left]\frac{1}{\sqrt{5}},1\right[\cup \left[\frac{5}{2},+\infty\right[.$$

Question 9. *Prouvez par récurrence sur n (n $\geqslant 1$) que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,*

$$(1+t+t^2+\cdots+t^n)(t-1) = t^{n+1}-1 \tag{1}$$

CAS DE BASE $n = 1$: Il faut prouver que $(1+t)(t-1) = t^2-1$. C'est un produit remarquable bien connu : $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE : supposons que la propriété (1) soit démontrée pour les naturels n tels que $1 \leqslant n \leqslant \ell$.

PAS DE RÉCURRENCE : prouvons que, sous l'hypothèse de récurrence, la propriété (1) est vraie pour $n = \ell+1$, c'est-à-dire que

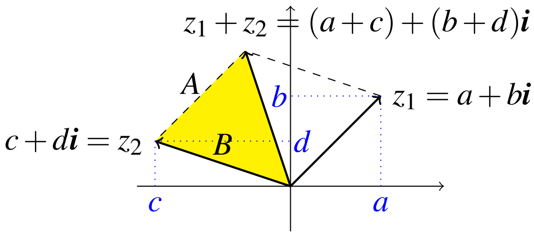
$$(\underbrace{1+t+t^2+\cdots+t^\ell}_{A}+t^{\ell+1})(t-1) = t^{\ell+1+1}-1$$

Par hypothèse de récurrence $A(t-1) = t^{\ell+1}-1$. D'autre part, $t^{\ell+1}(t-1) = t^{\ell+2}-t^{\ell+1}$ et donc le premier membre de l'équation est égal à $t^{\ell+1}-1+t^{\ell+2}-t^{\ell+1} = t^{\ell+2}-1$.

Question 10. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts.*

(a) *Faites un dessin commenté qui représente la construction géométrique de la somme $z_1 + z_2$ dans le plan complexe.*

La somme complexe est déterminée par la somme des parties réelles et des parties imaginaires, ce qui correspond à la somme des vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $(a,b)+(c,d)$. Il suffit donc d'appliquer la règle du parallélogramme.



(b) *Déduisez-en (justifier par une phrase en français en vous basant sur des résultats vus pendant vos études secondaire) que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.*

$|z_1 + z_2|$ est la longueur du segment joignant 0 à $z_1 + z_2$ qui est le côté du triangle dont les sommets sont 0, z_2, $z_1 + z_2$; $|z_2|$ est la longueur du segment B et $|z_1|$ est la longueur du segment A car 0, z_1, $z_1 + z_2$, z_2 est un parallélogramme. Par la règle qui dit que la longueur d'un côté d'un triangle est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés (ce qui traduit que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points), on a $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

(c) *Démontrez, en utilisant la définition du module d'un complexe, que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.*

Posons $z_1 = a + b\boldsymbol{i}$ et $z_2 = c + d\boldsymbol{i}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. On a donc que $z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)\boldsymbol{i}$. Il s'ensuit que $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $|z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$. On doit prouver que

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \tag{2}$$

Puisque chaque membre est positif, les élever au carré ne modifie pas l'inégalité et cette nouvelle inégalité est équivalente à celle de départ. On doit donc démontrer que

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

ou encore, après simplification, que $ac+bd \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. Dans le cas où le premier membre est négatif, cette inégalité est trivialement vérifiée. Dans le cas où $ac+bd$ est $\geqslant 0$, on peut élever les deux membres au carré ce qui donne

$$(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

c'est-à-dire $a^2c^2+b^2d^2+2acbd \leqslant a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$, ou encore $0 \leqslant b^2c^2+a^2d^2-2acbd$, c'est-à-dire $0 \leqslant (bc-ad)^2$ ce qui est toujours vérifié.

REMARQUE : On peut mener les calculs plus rapidement si on se rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$. En effet, $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ est équivalent à $|z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\,|z_2|$. Or $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2})$ où la dernière égalité utilise le fait que $z+\bar{z} = 2\,\Re\mathrm{e}(z)$. L'inégalité de départ se réduit donc, après simplifications, à $\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1|\,|z_2|$. Or, vu qu'on a toujours que $\Re\mathrm{e}(z) \leqslant |z|$, on peut écrire que $\Re\mathrm{e}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\,|\overline{z_2}| = |z_1|\,|z_2|$ ce qui termine la preuve.