Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Vérifiez que $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$ est une tautologie. $/2$

Question 2. Donnez la négation de « s'il pleut, je mets mon maillot de bain ». $/1$

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2008)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

/2

Calculez A^2. Détaillez vos calculs.

Question 4. Soit α une racine de l'équation $X^n = 1$.

/3

(a) Prouvez que si $k \in \mathbb{Z}$, alors α^k est aussi une racine de l'équation $X^n = 1$.

(b) Prouvez que $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}\}$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Calculez les solutions complexes Z de l'équation $Z^2 + 2\boldsymbol{i}Z - 1 + \boldsymbol{i} = 0$. Écrivez-les sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et représentez-les dans le plan complexe. $/5$

Question 6. Dites si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\operatorname{tg} y = x$ est une fonction. Justifiez. $/2$

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2008)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 7. /6

- Déterminez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{\sqrt{x}-2}}$.
- Déterminez l'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, -2t^2+1)$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. /5

(a) Soient $A, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez que $(A+B)^t = A^t + B^t$. Pour rappel, si $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, M^t désigne la transposée de M.

(b) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

/4

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}(i^3 - j^3)^2$$

La matrice M est-elle symétrique ? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

(c) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}A$, par $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M définie au point précédent.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 10. Prouvez par récurrence que /5

$$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$