Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (13 octobre 2008) **Correction**

Question 1. *Vérifiez que* $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$ *est une tautologie.*

La table de vérité de cette formule est la suivante :

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$	$(A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Les valeurs de vérité de la dernière colonne étant toutes 1, la proposition est bien une tautologie.

Question 2. *Donnez la négation de « s'il pleut, je mets mon maillot de bain ».*

Il s'agit d'une proposition du type $A \Rightarrow B$ avec A valant « il pleut » et B étant « je mets mon maillot de bain ». La négation en est $A \wedge \neg B$ et donc, pour le cas particulier qui nous intéresse ici : « il pleut et [malgré cela] je ne mets pas mon maillot de bain ».

Question 3. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculez A^2*. Détaillez vos calculs.*

Remarquons que $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$. On a donc :

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} \\ 1+\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} & 1+\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}+\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule $\operatorname{cis}\theta \cdot \operatorname{cis}\theta' = \operatorname{cis}(\theta+\theta')$. Or $\operatorname{cis}\frac{6\pi}{3} = \operatorname{cis} 0 = 1$, $\operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $1 + \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} + \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$. Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 4. *Soit α une racine de l'équation $X^n = 1$.*

(a) Prouvez que si $k \in \mathbb{Z}$, alors α^k est aussi une racine de l'équation $X^n = 1$.

Par définition de « être racine », il faut vérifier que $(\alpha^k)^n = 1$. C'est vrai car $(\alpha^k)^n = \alpha^{kn} = (\alpha^n)^k = 1^k = 1$.

(b) Prouvez que $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

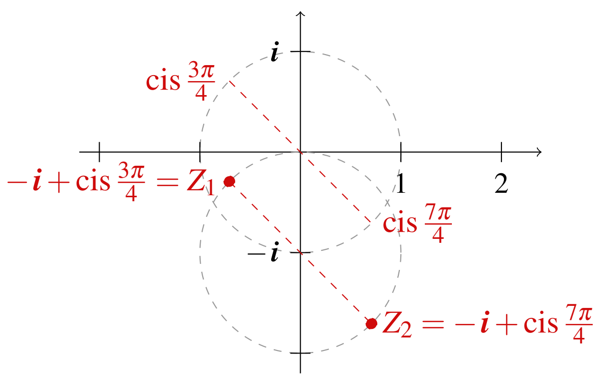
Prouver cette inclusion veut dire montrer que tous les éléments de l'ensemble $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ appartiennent bien à $\{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Soit α^k un élément du premier ensemble (on sait juste qu'un tel $k \in \mathbb{Z}$ existe, on ne peut rien supposer sur k). Montrer que $\alpha^k \in \{\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}\}$ signifie monter que $\alpha^k = \alpha^\ell$ pour un $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Or la division Euclidienne dit que $k = qn + r$ pour $q, r \in \mathbb{Z}$ avec $0 \leqslant r < n$ c'est-à-dire $z \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Donc $\alpha^k = \alpha^{qn+r} = (\alpha^n)^q \cdot \alpha^r = 1^q \cdot \alpha^r = \alpha^r$. Il suffit donc de prendre $\ell = r$.

Question 5. *Calculez les solutions complexes Z de l'équation $Z^2 + 2\boldsymbol{i}Z - 1 + \boldsymbol{i} = 0$. Écrivez-les sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et représentez-les dans le plan complexe.*

L'équation à résoudre est de la forme $aZ^2 + bZ + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 2\boldsymbol{i}$ et $c = -1 + \boldsymbol{i}$. L'équation auxiliaire est $Y^2 = b^2 - 4ac = (2\boldsymbol{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + \boldsymbol{i}) = -4\boldsymbol{i} = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$. Elle a pour solutions $Y_1 := 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et $Y_2 := \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} = -Y_1$. L'équation de départ possède donc les solutions

$$
\begin{aligned}
Z_1 &:= \frac{-2\boldsymbol{i} + Y_1}{2} = \frac{-2\boldsymbol{i} - \sqrt{2} + \sqrt{2}\boldsymbol{i}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} \quad \text{et} \\
Z_2 &:= \frac{-2\boldsymbol{i} + Y_2}{2} = \frac{-2\boldsymbol{i} + \sqrt{2} - \sqrt{2}\boldsymbol{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

Le plus simple pour représenter Z_1 et Z_2 est sans doute de remarquer qu'ils s'écrivent sous la forme $Z_1 = -\boldsymbol{i} + \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ et $Z_2 = -\boldsymbol{i} + \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$. Il suffit donc de translater les deux nombres sur le cercle trigonométrique au point $-\boldsymbol{i}$.



Question 6. *Dites si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $\operatorname{tg} y = x$ est une fonction. Justifiez.*

f n'est pas une fonction. En effet, il existe au moins un x auquel correspond plusieurs y. Par exemple, pour $x = 0$, $y = 0$ et $y = \pi$ sont deux solutions de $\operatorname{tg} y = x$ (il y a en vérité l'infinité de solutions $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, à cette équation mais le fait qu'il y en aie deux suffit à contredire la définition de fonction).

Question 7.

- *Déterminez le domaine de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{\sqrt{x}-2}}$.*

  Trois conditions sont à vérifier pour que l'expression qui définit $f(x)$ ait un sens :

  - $x \geqslant 0$ pour que $\sqrt{x}$ existe ;
  - $\sqrt{x} - 2 \neq 0$ pour qu'on puisse diviser par cette expression ;
  - $\frac{x-1}{\sqrt{x}-2} \geqslant 0$ pour pouvoir en prendre la racine.

  Comme l'équation $\sqrt{x} - 2 = 0$ est équivalente à $\sqrt{x} = 2$ ou encore — vu que les deux membres sont positifs — à $x = 4$, la seconde condition est équivalente à $x \neq 4$. Le signe de la fraction se déduit simplement du signe du numérateur et du dénominateur :

	0		1		4	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\sqrt{x}-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{\sqrt{x}-2}$	$+$	$+$	0	$-$	|	$+$

  Le domaine de f est donc $[0, 1] \cup]4, +\infty[$.

- *Déterminez l'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, -2t^2 + 1)$.*

  Par définition de l'image, on a

$$\operatorname{Im} g = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \text{il existe } t \in \mathbb{R},\ (x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)\right\}$$

  Nous allons montrer que cet ensemble n'est rien d'autre que

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = -2x + 1 \wedge x \geqslant 0\right\}$$

  Appelons A ce dernier ensemble. Montrer $\operatorname{Im} g = A$ requiert de prouver deux inclusions.

  - $\operatorname{Im} g \subseteq A$. Soit $(x, y) \in \operatorname{Im} g$. Par définition, on sait qu'il existe un certain $t \in \mathbb{R}$ (on sait juste que t existe, on ne connait pas sa valeur exacte) tel que $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$ i.e., $x = t^2$ et $y = -2t^2 + 1$. Par conséquent on a bien que $x = t^2 \geqslant 0$ et $y = -2t^2 + 1 = -2x + 1$ ce qui dit que le couple (x, y) vérifie les deux conditions nécessaires pour que $(x, y) \in A$.
  - $A \subseteq \operatorname{Im} g$. Soit $(x, y) \in A$, c'est-à-dire $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie les deux conditions $y = -2x + 1$ et $x \geqslant 0$. Pour établir que $(x, y) \in \operatorname{Im} g$, il faut montrer qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$. Prenons $t = \sqrt{x}$. C'est possible car $x \geqslant 0$. On a bien $t^2 = (\sqrt{x})^2 = x$ et $y = -2x + 1 = -2t^2 + 1$. Le fait d'avoir pu exhiber un t tel que $(x, y) = (t^2, -2t^2 + 1)$ implique que $(x, y) \in \operatorname{Im} g$.

Question 8.

(a) *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez que $(A+B)^t = A^t + B^t$. Pour rappel, si $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, M^t désigne la transposée de M.*

Nous devons montrer que $\forall i, j = 1, \dots, p,\ (A+B)^t_{ij} = A^t_{ij} + B^t_{ij}$. Soient $i, j \in \{1, \dots, p\}$. On a :

$$\begin{aligned}
(A+B)^t_{ij} &= (A+B)_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\
&= A_{ji} + B_{ji} && \text{par définition de l'addition matricielle}\\
&= A^t_{ij} + B^t_{ij} && \text{par définition de la transposée}
\end{aligned}$$

(b) *Soient $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A^t_n \cdots A^t_2 A^t_1 \tag{1}$$

Le cas de base, $n = 1$, affirme que $(A_1)^t = A^t_1$. C'est trivialement vérifié.

Étape de récurrence : Supposons que l'égalité (1) soit vérifiée pour tous les naturels $n \leqslant k$ (avec $k \geqslant 1$) ; prouvons que, sous cette hypothèse de récurrence, l'égalité (1) est vérifiée pour $n = k+1$, c'est-à-dire que

$$(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t = A^t_{k+1} A^t_k \cdots A^t_2 A^t_1.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t &= \big((A_1 A_2 \cdots A_k) A_{k+1}\big)^t && \text{associativité du produit matriciel}\\
&= A^t_{k+1} (A_1 A_2 \cdots A_k)^t && \text{car } (AB)^t = B^t A^t\\
&= A^t_{k+1} (A^t_k \cdots A^t_2 A^t_1) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= A^t_{k+1} A^t_k \cdots A^t_2 A^t_1 && \text{associativité du produit matriciel}
\end{aligned}$$

Question 9.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est une matrice symétrique ».*

A est symétrique si $A^t = A$ où A^t désigne la transposée de A.

(b) *Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}(i^3 - j^3)^2$$

La matrice M est-elle symétrique ? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.

Regardons si $M^t = M$ c'est-à-dire $\forall i, j = 1, \dots, n,\ M^t_{ij} = M_{ji}$. On a :

$$\begin{aligned}
M^t_{ij} &= M_{ji} && \text{par définition de la transposée}\\
&= (-1)^{j+i}(j^3 - i^3)^2 && \text{par définition de } M\\
&= (-1)^{i+j}\big(-(i^3 - j^3)\big)^2 && \text{car } (-1)^{i+j} = (-1)^{j+i}\\
&= (-1)^{i+j}\underbrace{(-1)^2}_{=1}(i^3 - j^3) = M_{ij}
\end{aligned}$$

(c) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Calculez la trace de la matrice M définie au point précédent.*

On a $M_{ii} = (-1)^{i+i}(i^3 - i^3)^2 = 0$ pour tout i. Donc $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \text{ fois}} = 0$.

Question 10. *Prouvez par récurrence que*

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cas initial : $n = 0$

Le premier membre de l'égalité est $0^2 = 0$.
Le second membre de l'égalité est $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$.
Le cas initial est donc vérifié.

Étape de récurrence :

Supposons (hypothèse de récurrence) que la formule soit vérifiée pour tout naturel $n \leqslant k$ ($k \geqslant 1$) et montrons que, sous cette hypothèse, la formule est vérifiée en $n = k+1$. Dans ce cas, le premier membre devient :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hyp. de réc. pour } n=k}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\begin{aligned}
&= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right] = \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6)\\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

car $(k+2)\big(2(k+1)+1\big) = 2k^2 + 6k + 4 + k + 2 = 2k^2 + 7k + 6$.