

Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(20 octobre 2008)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les sommes suivantes :

■ $\sum_{k=0}^n i^2 =$

■ $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n ((k^2 - \ell^2) + 2\ell) =$

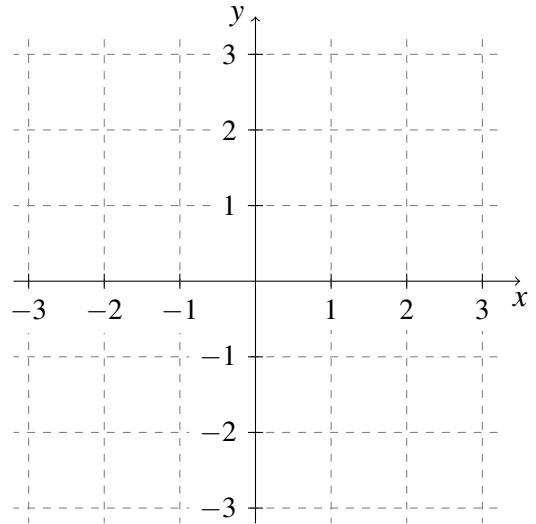
■ $\sum_{k=-7}^{14} 2 =$

/ 4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2 - 1, t^3)$. Veuillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez $\text{Im } \gamma$ sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche.

/ 8



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3.

/5

(a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez l'inverse de M , s'il existe.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

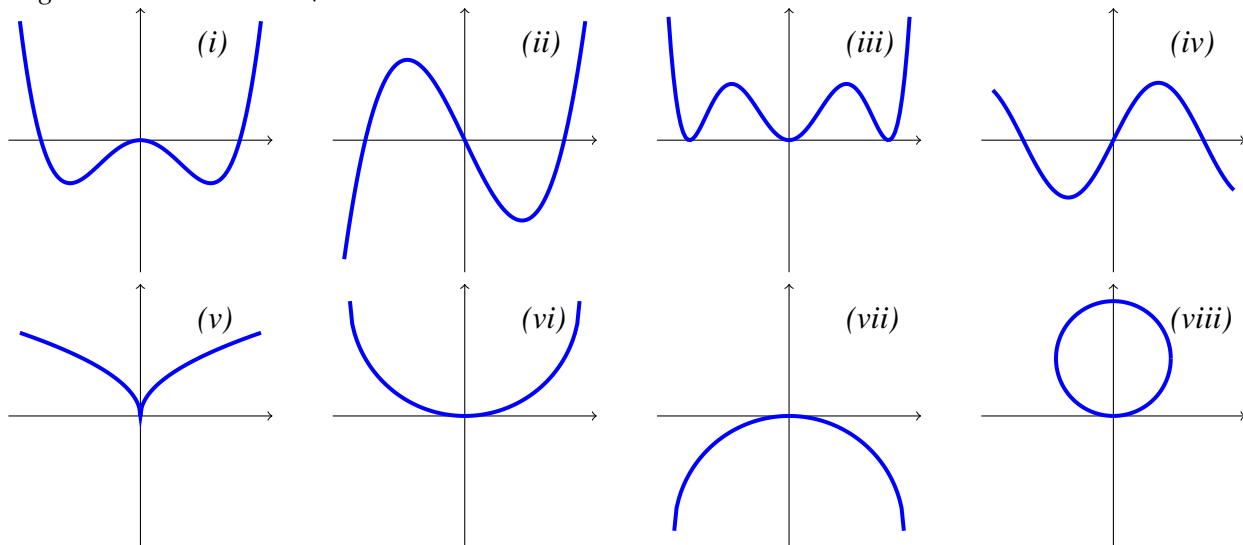
Question 3 (suite).

(b) En utilisant le point précédent, résolvez le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ -x_2 - x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Question 4. Parmi les graphes ci dessous, Repérez ceux des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 3x^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2 - \sqrt{4 - x^2}$. Justifiez brièvement vos choix.



/ 3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Résolvez le système suivant en discutant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

/ 4

$$\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ (\lambda + 1)x + y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{cases}$$

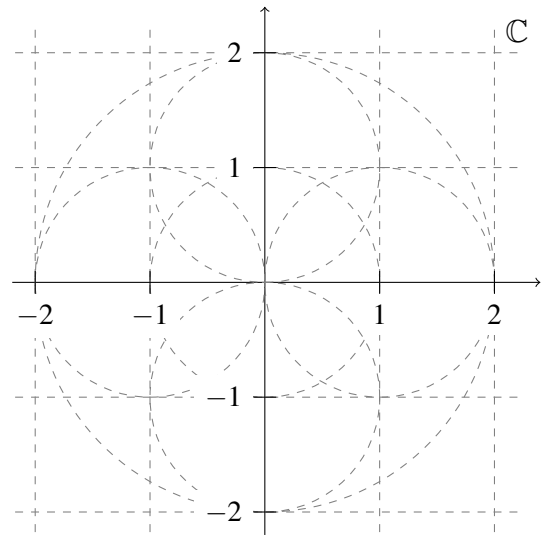
Question 6.

/ 3

- (a) Prouvez que $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ est une tautologie.
- (b) Donnez la négation de la phrase suivante : « Si le professeur explique bien, alors les élèves réussiront l'examen ». Expliquez votre démarche.

Question 7.

- (a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n, n \geq 0$.
- (b) Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de $n \bmod 12$.
- (c) Prouvez que, pour les z_n définis ci-dessus, $\{z_n | n \geq 0\} = \{z \in \mathbb{C} | z^{12} = 1\}$.
- (d) Prouvez que $(1 - i)^{12} = -64$.
- (e) Donnez toutes les solutions complexes sous la forme $a + bi$ de l'équation $Z^{12} = -64$.



/ 14

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. Soient les matrices

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez $S \cdot T$ et déduisez-en la matrice T^{-1} . Expliquez votre démarche.

/ 3