Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (20 octobre 2008)

Correction

Question 1. *Calculez les sommes suivantes :*

- $\sum_{k=0}^{n} i^2 = (n+1)i^2$ car i^2 est constant par rapport à la variable de sommation k.
- $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\big((k^2-\ell^2)+2\ell\big) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(k^2-\ell^2)}_{=0} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} 2\ell$$
  $$= 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\ell = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\sum_{k=1}^{n} 1 = n^2(n+1)$$
  où la sommation nulle découle du fait qu'on somme tous les éléments d'une matrice carrée antisymétrique.
- $\sum_{k=-7}^{14} 2 = 22\cdot 2 = 44$ car k parcourt l'ensemble $\{-7,-6,\dots,0,1,\dots,14\}$ qui comprend 22 éléments.

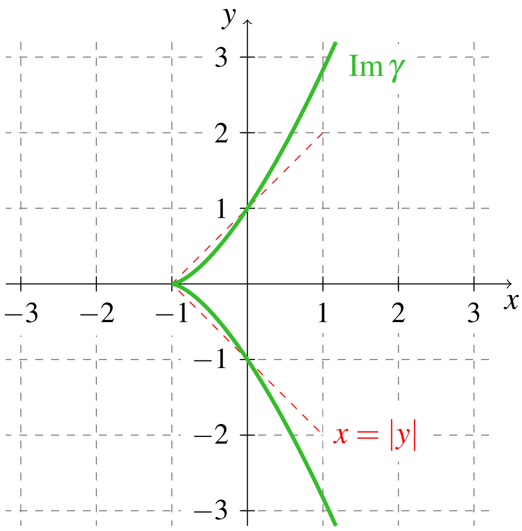
Question 2. *Déterminez l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2-1, t^3)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs. Tracez* $\operatorname{Im}\gamma$ *sur le graphe ci-dessous. Expliquez votre démarche.*

Par définition

$$\operatorname{Im}\gamma = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| \exists t\in\mathbb{R},\ (x,y) = (t^2-1,t^3)\big\}$$

Nous allons montrer que cet ensemble est égal à

$$A := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x = y^{2/3}-1\big\}$$



- $\underline{\operatorname{Im}\gamma \subseteq A.}$ Soit $(x,y)\in\operatorname{Im}\gamma$, c'est-à-dire que $(x,y) = (t^2-1,t^3)$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$ (sur lequel on n'a aucune autre information). L'égalité de couples signifiant l'égalité composante par composante, on a
  $$\begin{cases} x = t^2-1 \\ y = t^3 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = t^2-1 \\ t = y^{1/3} \end{cases}$$
  et donc $x = y^{2/3}-1$ ce qui signifie que $(x,y)\in A$.

- $\underline{A \subseteq \operatorname{Im}\gamma}$. Soit $(x,y) \in A$, c'est-à-dire soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation $x = y^{2/3} - 1$. On doit montrer que $(x,y) \in \operatorname{Im}\gamma$, c'est-à-dire que $(x,y) = (t^2 - 1, t^3)$ pour un $t \in \mathbb{R}$ choisi adéquatement. Prenons $t = y^{1/3}$ (il n'y a pas de condition pour prendre la racine cubique d'un nombre). On a

$$\begin{cases} y = t^3 & \text{(par définition de la racine cubique)} \\ x = (y^{1/3})^2 - 1 = t^2 - 1 \end{cases}$$

  Ceci montre bien que $(x,y) \in \operatorname{Im} f$.

Au vu du résultat précédent, $\operatorname{Im}\gamma$ est le graphe de la fonction $f : y \mapsto y^{2/3} - 1$ (dessiné correctement vu l'orientation de x et y sur le dessin). On a tracé cette fonction au cours. Pour rappel, ses caractéristiques principales sont

- $f(0) = -1$;
- f est une fonction paire en la variable y (donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des x) ;
- lorsque $y \approx 0$, $f(y) \gg |y| - 1$.
- lorsque $|y|$ est grand, $f(y)$ est > 0 et est grand (mais est bien plus petit que $|y| - 1$).

Question 3.

(a) *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez l'inverse de M, s'il existe.

Appliquons la méthode de la matrice compagnon :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3/5 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -3/5 & -1/5 \\ -1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \qquad \begin{pmatrix}1/5&7/5&4/5\\1/5&-3/5&-1/5\\-1/5&-2/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1/2 \qquad \begin{pmatrix}1/10&7/10&2/5\\1/5&-3/5&-1/5\\-1/5&-2/5&1/5\end{pmatrix} = M^{-1}$$

On peut vérifier qu'on a le bon inverse en calculant le produit :

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix}2&3&-1\\0&-1&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/10&7/10&2/5\\1/5&-3/5&-1/5\\-1/5&-2/5&1/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

(b) *En utilisant le point précédent, résolvez le système*

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=10\\-x_2-x_3=-15\\2x_1+x_2+2x_3=-10\end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Ce système s'écrit matriciellement

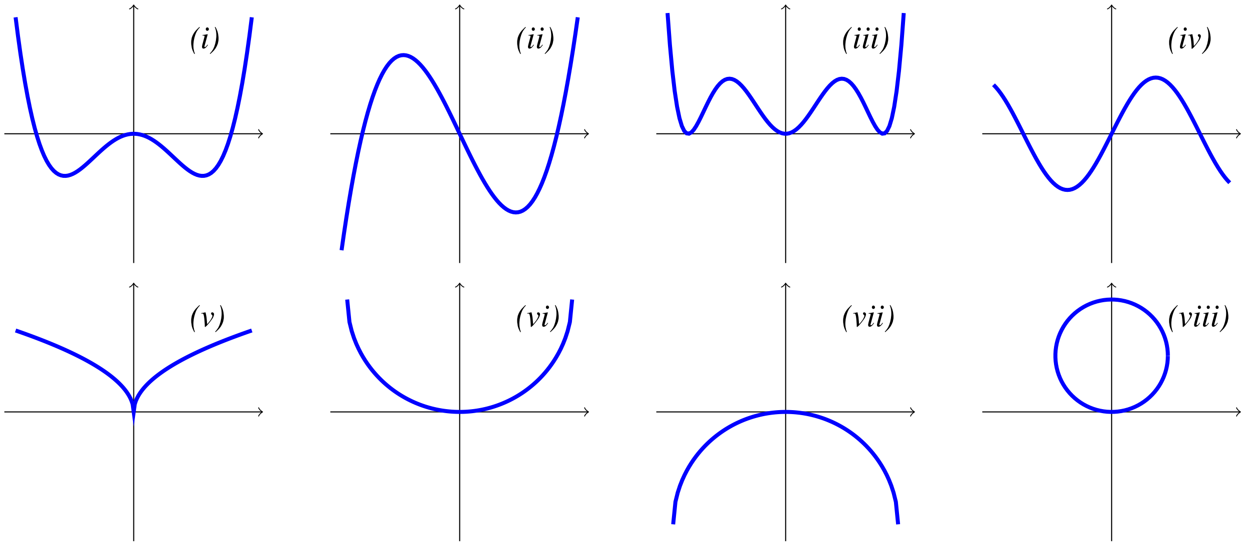
$$M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-15\\-10\end{pmatrix}$$

Comme M^{-1} existe, on a :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}10\\-15\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{7}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-15\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{21}{2}-4\\2+9+2\\-2+6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-27/2\\13\\2\end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-27/2, 13, 2)\}$.

Question 4. *Parmi les graphes ci dessous, Repérez ceux des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^4-3x^2$ *et* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 2-\sqrt{4-x^2}$. *Justifiez brièvement vos choix.*



La fonction f est paire (donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des y) et possède 3 racines ($-\sqrt{3}$, 0, et $\sqrt{3}$). Ceci restreint le choix aux graphes (i) et (iii). Lorsque $x\approx 0$, $x^4 \ll x^2$ et donc $f(x)\approx -3x^2$. Le graphe de f est donc (i).

La fonction g est paire (donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des y). De plus, si $(x,y)\in \text{Graphe}\, g$, alors $y=2-\sqrt{4-x^2}$ et donc[1] $x^2+(y-2)^2=4$ ce qui veut dire que (x,y) appartient à un cercle de centre $(0,2)$ et de rayon 2. Il n'y a que (vi) qui possède ces qualités. (Remarque : (viii) n'est *pas* le graphe d'une fonction.)

Question 5. *Résolvez le système suivant en discutant en fonction du paramètre* $\lambda\in\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x-\lambda y=1\\ (\lambda+1)x+y=\lambda\\ \lambda x-y=\lambda\end{cases}$$

Écrivons la matrice augmentée du système et échelonnons-la :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1\\ \lambda+1 & 1 & \lambda\\ \lambda & -1 & \lambda\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1+\lambda^2+\lambda & -1\\ 0 & \lambda^2-1 & 0\end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} L_2\leftarrow L_2-(\lambda+1)L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\lambda L_1\end{array}$$

$$[A|b]:=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1/(1+\lambda^2+\lambda)\\ 0 & \lambda^2-1 & 0\end{array}\right) \qquad L_2\leftarrow L_2/(\lambda^2+\lambda+1)$$

[1] Ce n'est pas une équivalence.

où on peut toujours faire la dernière opération élémentaire car $\lambda^2+\lambda+1 \neq 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (le discriminant de $\lambda^2+\lambda+1$ vaut -3). On va distinguer trois cas selon que la valeur du coefficient de y dans la dernière équation s'annule ou non.

- Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1/(1+\lambda^2+\lambda) \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3/(\lambda^2-1)$$

  Comme $-1/(1+\lambda^2+\lambda)$ est toujours non nul, le système est impossible au vu des deux dernières lignes. L'ensemble des solutions est donc $\varnothing$.

- Si $\lambda = 1$.

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  La deuxième ligne donne $y = -1/3$. La première ligne donne $x = 1+y = 2/3$. L'ensemble des solutions est $\{(2/3,-1/3)\}$.

- Si $\lambda = -1$.

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  La deuxième ligne dit que $y = -1$. La première ligne donne $x = 1-y = 2$. L'ensemble des solutions est $\{(2,-1)\}$.

Question 6.

(a) *Prouvez que $\big(\neg(p \Rightarrow q)\big) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ est une tautologie.*

(b) *Donnez la négation de la phrase suivante : « Si le professeur explique bien, alors les élèves réussiront l'examen ». Expliquez votre démarche.*

(a) On dresse la table de vérité de la proposition :

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$	$\big(\neg(p \Rightarrow q)\big) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1

La dernière colonne n'étant composée que de 1, la proposition est bien une tautologie.

(b) La phrase « Si le professeur explique bien, alors les élèves réussiront l'examen » est de la forme $p \Rightarrow q$ avec p qui vaut « le professeur explique bien » et q qui vaut « les élèves réussiront l'examen ». Le point (a) nous apprend que la négation de $p \Rightarrow q$, $\neg(p \Rightarrow q)$, est équivalente à $p \wedge \neg q$, c'est-à-dire « Le professeur explique bien et [pourtant] les élèves ne réussiront pas l'examen ».

Question 7.

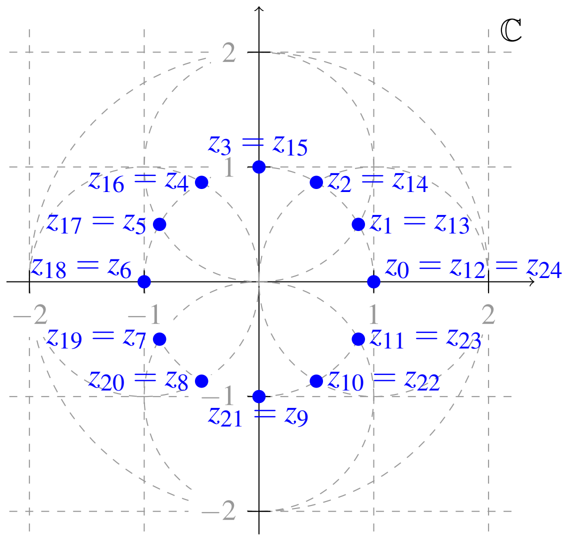
(a) *Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes* $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, $n \geqslant 0$.

(b) *Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 12.*

(c) *Prouvez que, pour les z_n définis ci-dessus,* $\{z_n \,|\, n \geqslant 0\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^{12} = 1\}$.

(d) *Prouvez que* $(1-\boldsymbol{i})^{12} = -64$.

(e) *Donnez toutes les solutions complexes sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ de l'équation $Z^{12} = -64$.*



(a) Comme $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$, $z_n = z_1^n = \operatorname{cis}\frac{n\pi}{6} = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6} \bmod 2\pi\right)$.

(b) Si nous divisons n par 12, nous pouvons écrire $n = q \cdot 12 + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r = n \bmod 12 \in \{0, \ldots, 11\}$. Donc

$$z_n = \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{6} \bmod 2\pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{(q \cdot 12 + r)\pi}{6} \bmod 2\pi\right)$$
$$= \operatorname{cis}\left(\left(q \cdot 2\pi + \frac{r\pi}{6}\right) \bmod 2\pi\right) = \operatorname{cis}\frac{r\pi}{6} = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^r = z_1^r = z_r$$

(voir le dessin pour $n \in \{0, \ldots, 24\}$).

(c) Clairement, $z_1^{12} = \operatorname{cis}\left(12\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}(2\pi) = \operatorname{cis} 0 = 1$. Donc $z_n = z_1^n$ élevé à la puissance 12 donne $z_n^{12} = (z_1^n)^{12} = (z_1^{12})^n = 1^n = 1$. Ceci dit exactement que $\{z_n \,|\, n \geqslant 0\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^{12} = 1\}$.

Réciproquement, soit $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^{12} = 1\}$, c'est-à-dire soit z solution de $z^{12} = 1$, on sait (vu au cours) que les solutions sont exactement les $\operatorname{cis}\left(r\frac{2\pi}{12}\right)$ avec $r \in \{0, \ldots, 11\}$, c'est-à-dire les $\operatorname{cis}\left(r\frac{\pi}{6}\right) = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^r = z_1^r = z_r \in \{z_n \,|\, n \geqslant 0\}$.

(d) $(1-\boldsymbol{i})^{12} = \left((1-\boldsymbol{i})^2\right)^6 = (-2\boldsymbol{i})^6 = (-2)^6\boldsymbol{i}^6 = 64(-1) = -64$.

(e) Le point (d) montre que $1 - \boldsymbol{i}$ est solution de $Z^{12} = -64$. On a donc une solution particulière de $Z^{12} = -64$. Appelons la v. On sait que toutes les solutions de $Z^{12} = -64$ sont données par $v \cdot z$ avec z solution de $Z^{12} = 1$, c'est-à-dire $v \cdot z_0$, $v \cdot z_1, \cdots, v \cdot z_{11}$ (puisque (b) et (c) nous disent que les solutions de $Z^{12} = 1$ sont $z_0, z_1, \ldots, z_{11}$). Les solutions sont donc

$$vz_0 = (1-\boldsymbol{i}) \cdot 1 = 1 - \boldsymbol{i}$$
$$vz_1 = (1-\boldsymbol{i}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \boldsymbol{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$vz_2 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$vz_3 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{i} = 1+\boldsymbol{i}$$
$$vz_4 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$vz_5 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$vz_6 = (1-\boldsymbol{i})\cdot(-1) = -1+\boldsymbol{i}$$
$$vz_7 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$vz_8 = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$vz_9 = (1-\boldsymbol{i})\cdot(-\boldsymbol{i}) = -1-\boldsymbol{i}$$
$$vz_{10} = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$vz_{11} = (1-\boldsymbol{i})\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\Big)+\boldsymbol{i}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Question 8. *Soient les matrices*

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad et \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculez $S\cdot T$ et déduisez-en la matrice T^{-1}. Expliquez votre démarche.

On a

$$S\cdot T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par définition de l'inverse, T^{-1} est la matrice telle que $T^{-1}T = \mathbb{1}$ ($= TT^{-1}$). On obtient $\mathbb{1}$ en appliquant à la matrice ST la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On a vu qu'appliquer cette transformation revient à multiplier à gauche la matrice ST par l'identité à laquelle on a fait subir la même transformation. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ST = \mathbb{1}$$

Donc

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$