Mathématique Élémentaire

Examen (26 octobre 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Mathématique Élémentaire

Examen (26 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1. Calculer les sommes suivantes : /3

- $\sum_{i=-2}^{k} 2 =$
- $\sum_{i=-2}^{t} (2+i^2+j) =$

Question 2. /4

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de x est plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors x est nul ».

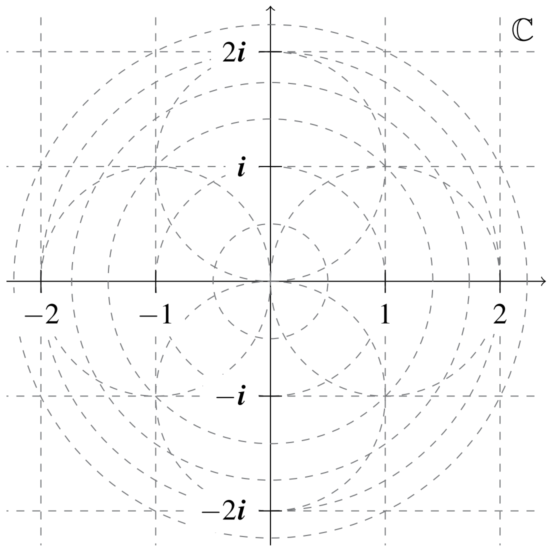
(b) Prouvez que $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.

Mathématique Élémentaire

Examen (26 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = -8$. Donnez les solutions sous les formes $a + b\boldsymbol{i}$ et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe. $\big/6$



Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système a-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.

(b) Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soient les ensembles

/5

$$A = \{\alpha \mid \alpha \text{ est un plan perpendiculaire à la droite } D \equiv x-3 = -y/2+1 = 3z-4\}$$
$$B = \{\beta \mid \beta \text{ est un plan dont un vecteur normal est } (-6,12,-2)\}$$

(a) Soit le plan $\pi \equiv -3x+6y-z=\sqrt{3}$. A-t-on $\pi \in A$? A-t-on $\pi \in B$? Justifiez.

(b) Montrez que $A = B$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Prouvez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que /5

$$\partial^n\big(f \cdot g\big)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \partial^i f(x) \cdot \partial^{n-i} g(x)$$

Pour rappel, $\partial^m h$ désigne la dérivée m^{e} de la fonction h, c'est-à-dire $\partial^m h = \underbrace{\partial\big(\cdots\partial(\partial}_{m \text{ dérivées}} h)\big)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. /5

(a) Définissez ce que veut dire « A^{-1} est l'inverse de A ».

(b) Supposons que $\text{dét} A \neq 0$. En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét} A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

(c) Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. Pour rappel, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Mathématique Élémentaire

Examen (26 octobre 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. /7

(a) Donnez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln \sqrt{\dfrac{1}{|x|-1} - |x| + 2}$ sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

(b) Donnez une équation cartésienne de l'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin t, \sin^2 t)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

/4

(a) Montrez que la matrice M est symétrique.

(b) Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Question 10. Soit la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sqrt{t}, 2t^2)$. Déterminez tous les points $t \in \operatorname{Dom}\gamma$ tels que la tangente à $\operatorname{Im}\gamma$ en $\gamma(t)$ soit parallèle à la droite $y = x$.

/4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

/5

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 - (3-2\boldsymbol{i})X + 1 - 3\boldsymbol{i} = 0$.

(b) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ où $a \neq 0$. Prouvez que $z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1 z_2 = c/a$.

(c) Vérifier les affirmations du point (b) dans le cas des solutions trouvées au point (a).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12.

/7

(a) Calculer

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} =$
- $\overline{2+3\boldsymbol{i}} =$
- $\left|(1+\boldsymbol{i})^{10}\right| =$
- $\overline{(1-\boldsymbol{i})(2+3\boldsymbol{i})} =$

(b) Donnez la forme trigonométrique de $1-\boldsymbol{i}$ et $\overline{1-\boldsymbol{i}}$.

(c) En utilisant les propriétés vues au cours pour le conjugué, prouvez que, si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et si $z \in \mathbb{C}$ vérifie

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{1}$$

alors

$$a_4 \overline{z}^4 + a_3 \overline{z}^3 + a_2 \overline{z}^2 + a_1 \overline{z} + a_0 = 0. \tag{2}$$

(d) Déduire de (c) que si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et z est solution dans $\mathbb{C}$ de

$$a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0 \tag{3}$$

alors $\overline{z}$ est également solution de (3).