Mathématique Élémentaire

Examen (26 octobre 2009)

Correction

Question 1. *Calculer les sommes suivantes :*

- $\sum_{i=-2}^{k} 2 = 2\sum_{i=-2}^{k} 1 = 2(k+3)$
- $\sum_{i=-2}^{t} (2+i^2+j) = \sum_{i=-2}^{t}(2+j) + \sum_{i=-2}^{t} i^2 = (2+j)\sum_{i=-2}^{k} 1 + (-2)^2 + (-1)^2 + \sum_{i=0}^{t} i^2$
  $= (2+j)(t+3) + 5 + \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$

Question 2.

(a) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de x est plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors x est nul ».*

(b) *Prouvez que $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.*

(a) « Si x n'est pas nul alors la valeur de x n'est pas plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$ ».

C'est-à-dire : « Si x n'est pas nul alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la valeur absolue de x est plus grande que $1/2^{n_0}$ ».

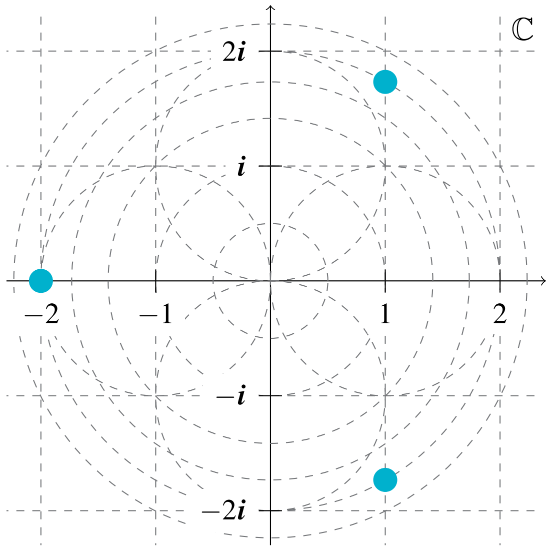
(b) Notons $P \equiv A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	P
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Question 3. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = -8$. Donnez les solutions sous les formes $a+b\boldsymbol{i}$ et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.*

Une solution particulière est clairement -2 car $(-2)^3 = -8$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme $z_0 u$ avec $u \in U_3$ l'ensemble des solution de $X^3 = 1$, càd $U_3 = \{1, \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}, \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}\}$. Par conséquent les solutions de $X^3 = -8$ sont -2, $-2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $-2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$; ou encore sous forme $a+b\boldsymbol{i}$: -2, $1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}$ et $1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}$.

(Toutes ces solutions sont de module 2 et donc se trouvent sur le cercle de rayon 2.)



Question 4. *Soit le système*

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système a-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.*

(b) *Résolvez le système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(c) *Calculez, si possible, l'inverse de la matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Le système a une solution unique ssi le déterminant de la matrice des coefficients est non nul. On a :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{\overset{\uparrow}{=}} \lambda^3 + 1 + 1 - (\lambda+\lambda+\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2)$$

(car le déterminant s'annule en $\lambda = 1$ et par la règle de Horner). Le déterminant est donc non nul ssi $\lambda \neq 1$ et $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$ c'est-à-dire ssi $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$.

(b) Si $\lambda = 1$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

On a donc $x = 1-y-z$ et l'ensemble des solutions est $\{(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

Si $\lambda = -2$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x+-2y+z=-2 \\ x+y+-2z=4 \end{cases}$$

Échelonnons la matrice augmentée de ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \qquad (L_2 \leftarrow L_2+2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3-L_1)$$

La deuxième ligne correspond à l'équation $-3y+3z=-3$ et la troisième ligne correspond à l'équation $3y-3z=6$ c'est-à-dire $-3y+3z=-6$. Le système est donc impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$, alors le système a une solution unique que l'on obtient avec les formules de Cramer.

- $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{\lambda^2+\lambda^2+\lambda-\lambda^3-1-\lambda^2}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)}$$

  $$\Rightarrow x = \frac{-\lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{-\lambda^2+1}{\lambda^2+\lambda-2} = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{(\lambda-1)(\lambda+2)} = \frac{-(1+\lambda)}{\lambda+2}$$

- $$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{\lambda^3+1+\lambda^2-\lambda-\lambda^3-\lambda}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)}$$

  $$\Rightarrow y = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{1}{\lambda+2}$$

- $$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{\lambda^4+\lambda+1-\lambda-\lambda^2-\lambda^2}{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)} = \frac{\lambda^4-2\lambda^2+1}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\lambda^2-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\left(\frac{-(1+\lambda)}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)\right\}$.

(c) On sait que l'inverse d'une matrice A existe ssi dét$A \neq 0$. La matrice donnée est la matrice des coefficients lorsque $\lambda = -2$. Comme -2 annule le déterminant, la matrice n'est pas inversible.

Question 5. *Soient les ensembles*

$$A = \left\{\alpha \mid \alpha \text{ est un plan perpendiculaire à la droite } D \equiv x-3 = -y/2+1 = 3z-4\right\}$$
$$B = \left\{\beta \mid \beta \text{ est un plan dont un vecteur normal est } (-6,12,-2)\right\}$$

(a) *Soit le plan $\pi \equiv -3x+6y-z = \sqrt{3}$. A-t-on $\pi \in A$? A-t-on $\pi \in B$? Justifiez.*

(b) *Montrez que $A = B$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(a) Le vecteur $(-3,6,-1)$ est un vecteur normal de π. On a que $\pi \in A$ ssi $(-3,6,-1)$ est un vecteur directeur de D. Or $D \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4/3}{1/3}$. Donc $(1,-2,\frac{1}{3})$ est un vecteur directeur de D. Comme $(-3,6,-1) = -3(1,-2,\frac{1}{3})$, ces deux vecteurs sont colinéaires et donc $(-3,6,-1)$ est bien un vecteur directeur de D. Donc $\pi \in A$.

On a $\pi \in B$ ssi les vecteurs $(-3,6,-1)$ et $(-6,12,-2)$ sont colinéaires. Or $(-6,12,-2) = 2(-3,6,-1)$, donc $\pi \in B$.

(b) $A = B$ ssi $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

- $A \subseteq B$

  Il faut prouver que tout élément $\alpha \in A$ appartient à B. Soit un tel $\alpha \in A$, c'est-à-dire α est un plan perpendiculaire à D. Autrement dit, le vecteur $(1,-2,\frac{1}{3})$ qui est un vecteur directeur de D est un vecteur normal de α. Comme $(-6,12,-2) = -6(1,-2,\frac{1}{3})$, ces deux vecteurs sont colinéaires et donc $\alpha \in B$.

- $B \subseteq A$

  Il faut prouver que tout élément $\beta \in B$ appartient à A. Soit $\beta \in B$, c'est-à-dire β est un plan dont un vecteur normal est $(-6,12,-2)$. Montrons que $\beta \in A$ c'est-à-dire $(-6,12,-2)$ est un vecteur directeur de D. C'est le cas puisque $(-6,12,-2) = -6(1,-2,\frac{1}{3})$.

Question 6. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Prouvez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que*

$$\partial^n\big(f\cdot g\big)(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{n-i}g(x) \tag{1}$$

Pour rappel, $\partial^m h$ désigne la dérivée m^e de la fonction h, c'est-à-dire $\partial^m h = \underbrace{\partial\big(\cdots\partial(\partial}_{m \text{ dérivées}} h)\big)$.

- Cas de base $n=0$: Dériver 0 fois la fonction revient à ne rien faire du tout. Par conséquent $\partial^0 h = h$. Pour $n=0$, (1) devient

$$\partial^0\big(f\cdot g\big)(x) = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{n-i}g(x),$$

  c'est-à-dire, vu qu'il n'y a que le cas $i=0$ dans la somme,

$$\big(f\cdot g\big)(x) = \binom{0}{0}\partial^0 f(x)\cdot\partial^0 g(x) = f(x)\cdot g(x),$$

  ce qui est vrai par définition du produit de deux fonctions.

- Pas récursif : Supposons que (1) soit vérifiée pour tous les $n \leqslant k$ et prouvons le pour $n = k+1$. Comme $\partial^{k+1}\big(f\cdot g\big)(x) = \partial\Big(\partial^k\big(f\cdot g\big)\Big)(x)$, il vient en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\partial^{k+1}\big(f\cdot g\big)(x) &= \partial\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{k-i}g(x)\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial\big(\partial^i f(x)\cdot\partial^{k-i}g(x)\big) \quad \text{(dérivation d'une somme et d'un multiple constant)}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\big(\partial^{i+1} f(x)\cdot\partial^{k-i}g(x) + \partial^i f(x)\cdot\partial^{k-i+1}g(x)\big) \quad \text{(dérivation d'un produit)}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial^{i+1} f(x)\cdot\partial^{k+1-(i+1)}g(x) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{k-i+1}g(x)\\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}\partial^{j} f(x)\cdot\partial^{k-j+1}g(x) + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{k-i+1}g(x)\\
&\qquad \text{(nouvel indice, on pose } j = i+1)\\
&= \binom{k}{k}\partial^{k+1} f(x)\cdot\partial^{0}g(x) + \sum_{i=1}^{k}\Big[\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\Big]\partial^i f(x)\partial^{k+1-i}g(x)\\
&\qquad + \binom{k}{0}\partial^0 f(x)\cdot\partial^{k+1}g(x).
\end{aligned}$$

  Pour obtenir cette dernière égalité, on extrait le terme pour la valeur de $j = k+1$ de la première somme et le terme pour la valeur de $i=0$ de la seconde somme. Vu que $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$,

$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ (vu au cours) et que $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$, cette dernière expression peut se réécrire

$$\binom{k+1}{k+1}\partial^{k+1}f(x)\cdot\partial^0 g(x) + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}\partial^i f(x)\partial^{k+1-i}g(x) + \binom{k}{0}\partial^0 f(x)\cdot\partial^{k+1}g(x)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\partial^i f(x)\cdot\partial^{k+1-i}g(x)$$

ce qui est bien la formule (1)

Question 7. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$.*

(a) *Définissez ce que veut dire « A^{-1} est l'inverse de A ».*

(b) *Supposons que $\text{dét} A \neq 0$. En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que*

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét} A}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

(c) *Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. Pour rappel, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(a) A^{-1} est l'inverse de A si $AA^{-1} = \mathrm{Id}$ et $A^{-1}A = \mathrm{Id}$.

(b) On a

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\text{dét} A} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\text{dét} A}\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & -\alpha\beta + \alpha\beta \\ \gamma\delta - \delta\gamma & -\gamma\beta + \alpha\delta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \gamma\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour montrer que $A^{-1}A = \mathrm{Id}$.

(c) On a $\text{dét} M = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1$

Par le point (b) on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$.

Question 8.

(a) *Donnez le domaine de définition de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{1}{|x|-1} - |x| + 2}$ *sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).*

(b) *Donnez une équation cartésienne de l'image de la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin t, \sin^2 t)$. *Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.*

(a) Pour que le logarithme existe, il faut que son argument soit strictement positif. Or une racine est toujours positive ou nulle, le seul cas à exclure est donc celui où celle-ci est nulle. Comme $\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$, cela revient à exiger que $\frac{1}{|x|-1} - |x| + 2 \neq 0$. Par ailleurs, pour que la racine existe, il faut que son argument soit positif ou nul : $\frac{1}{|x|-1} - |x| + 2 \geqslant 0$. Finalement, pour que la fraction existe, il faut que que son dénominateur soit non nul, c'est-à-dire $|x| - 1 \neq 0$, ce qui équivaut à $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

En résumé, les conditions d'existence sont

$$\frac{1}{|x|-1} - |x| + 2 > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad x \neq -1.$$

L'inéquation s'écrit de manière équivalente

$$\frac{1}{|x|-1} > |x| - 2. \tag{2}$$

Pour pouvoir multiplier par $|x| - 1$, il faut connaitre son signe. Vu que $|x| - 1 < 0$ ssi $|x| < 1$ ssi $-1 < x < 1$, on a le tableau de signe

		-1		1	
$\lvert x\rvert - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Si $x \in \,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[$: (2) devient

$$x^2 - 3|x| + 1 < 0 \tag{3}$$

  - Si $x \leqslant 0$, c'est-à-dire ici si $x \in \,]-\infty, -1[$, (3) devient $x^2 + 3x + 1 < 0$, c'est-à-dire x est à l'intérieur des racines du polynôme vu que le coefficient de x^2 est positif. On calcule ces racines par les formules usuelles et on trouve $x \in \,]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}[$. En tenant compte des conditions sous lesquelles on travaille, on obtient $x \in \,]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1[$.
  - Si $x \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \in \,]1, +\infty[$, (3) devient $x^2 - 3x + 1 < 0$. En argumentant comme au point précédent, on trouve que les x solutions sont $x \in \,]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$.
- Si $x \in \,]1, 1[$: (2) devient

$$x^2 - 3|x| + 1 > 0 \tag{4}$$

  - Si $x \leqslant 0$, c'est-à-dire si $x \in \,]-1, 0]$, (4) devient $x^2 + 3x + 1 > 0$ et, en argumentant comme ci-dessus on a que les solutions sont les $x \in \,]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0]$.

- Si $x \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \in [0,1[$, (4) devient $x^2 - 3x + 1 > 0$ et, en argumentant comme ci-dessus on a que les solutions sont les $x \in [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$.

En rassemblant les solutions trouvées dans chacun des quatres (sous-)cas ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow x &\in \left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\\ \Leftrightarrow x &\in \left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -1\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[\end{aligned}$$

Remarquez que cette solution est symétrique par rapport à 0, ce qui est normal vu que si x est solution de (2), alors $-x$ l'est également.

(b) Par définition de l'image, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} g &= \{(x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R},\ (x,y) = (\sin t, \sin^2 t)\} \\ &= \{(x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R},\ x = \sin t \text{ et } y = \sin^2 t\}.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que cet ensemble n'est rien d'autre que

$$A := \{(x,y) \mid y = x^2 \text{ et } x \in [-1,1]\}.$$

Tout d'abord $\operatorname{Im} g \subseteq A$. En effet si $(x,y) \in \operatorname{Im} g$, il s'ecrit comme $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, et donc $y = (\sin t)^2 = x^2$ et $x = \sin t \in [-1,1]$.

Inversement, si $(x,y) \in A$ on sait que $y = x^2$ et $x \in [-1,1]$. Puisque $x \in [-1,1]$, on peut définir $t = \arcsin x \in \mathbb{R}$. Dès lors $x = \sin t$ et $y = x^2 = \sin^2 t$, ce qui montre que $(x,y) \in \operatorname{Im} g$.

Question 9. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$M_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) *Montrez que la matrice M est symétrique.*

(b) *Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}$. Expliquez votre démarche.*

(a) M est symétrique si $M = M^t$ c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1,\dots,n\}$, $M_{ij} = M_{ji}$. Or, si $i = j$, $M_{ij} = i = M_{ji}$ et si $i \neq j$, $M_{ij} = 1 = M_{ji}$.

(b) Calculer cette double somme revient à additionner tous éléments de la matrice M. Comme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix},$$

on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = \underbrace{n^2 - n}_{\substack{\text{éléments}\\\text{hors diagonale}}} + \underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\substack{\text{éléments sur}\\\text{la diagonale}}} = n^2 - n + \frac{n(n+1)}{2} = \tfrac{1}{2}n(3n-1).$$

Question 10. *Soit la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sqrt{t}, 2t^2)$. Déterminez tous les points $t \in \operatorname{Dom}\gamma$ tels que la tangente à $\operatorname{Im}\gamma$ en $\gamma(t)$ soit parallèle à la droite $y = x$.*

Vu que les tangentes aux images d'une fonction sont le plus facilement décrites par des équations paramétriques, la première question est de déterminer quand une droite d'équation

$$(x,y) = (x_0,y_0) + \lambda(v_1,v_2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

est-elle parallèle à $y = x$. Cette dernière droite ayant $(1,1)$ comme vecteur directeur, pour avoir parallélisme il faut et il suffit que (v_1,v_2) soit un multiple de $(1,1)$, c'est-à-dire que $v_1 = v_2$. Dans notre cas, la droite tangente ayant pour équation $(x,y) = \gamma(t) + \lambda\partial\gamma(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, elle sera parallèle à $x = y$ si et seulement si $\partial\gamma_1(t) = \partial\gamma_2(t)$, c'est-à-dire si $\frac{1}{2\sqrt{t}} = 4t^2$, i.e. $\frac{1}{8} = t^{2/3}$, i.e. $t = \frac{1}{8^{2/3}}$, i.e. $t = \frac{1}{4}$.

Question 11.

(a) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 - (3-2\boldsymbol{i})X + 1 - 3\boldsymbol{i} = 0$.*

(b) *Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ où $a \neq 0$. Prouvez que $z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1 z_2 = c/a$.*

(c) *Vérifier les affirmations du point (b) dans le cas des solutions trouvées au point (a).*

(a) Le discriminant de cette équation est égal à $\big(-(3-2\boldsymbol{i})\big)^2 - 4(1-3\boldsymbol{i})$, c'est-à-dire $9 + 4\boldsymbol{i}^2 - 12\boldsymbol{i} - 4 + 12\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire 1. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 1$ dont les solutions sont 1 et -1. Les solutions de l'équation (a) sont donc

$$x_1 = \frac{-\big(-(3-2\boldsymbol{i})\big) - 1}{2} = \frac{2-2\boldsymbol{i}}{2} = 1 - \boldsymbol{i}$$

et

$$x_2 = \frac{-\big(-(3-2\boldsymbol{i})\big) + 1}{2} = \frac{4-2\boldsymbol{i}}{2} = 2 - \boldsymbol{i}.$$

(b) Les solutions de $aX^2+bX+c=0$ sont (vu au cours) $z_1=\frac{-b+y_1}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+y_2}{2a}$ ou y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation auxiliaire $Y^2=\Delta$. Par conséquent

$$z_0+z_1=\frac{-b+y_1+(-b+y_2)}{2a}=\frac{-2b+y_1+y_2}{2a} \tag{5}$$

Mais, vu que y_1 et y_2 sont solution de l'équation auxiliaire, on a $y_2=-y_1$. Il s'ensuit que $y_1+y_2=\frac{-b}{a}$.

Calculons

$$z_1z_2=\left(\frac{-b+y_1}{2a}\right)\left(\frac{-b+y_2}{2a}\right)=\frac{b^2+y_1y_2-b(y_1+y_2)}{4a^2}$$

Or, $y_1y_2=-{y_1}^2=-\Delta$. Donc

$$z_1z_2=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

(c) Ici, $a=1$, $b=-(3-2\boldsymbol{i})$, et $c=1-3\boldsymbol{i}$. Nous devons donc vérifier premièrement que $(1-\boldsymbol{i})+(2-\boldsymbol{i})=\frac{-(-(3-2\boldsymbol{i}))}{1}$ càd $3-2\boldsymbol{i}=3-2\boldsymbol{i}$, ce qui clairement vrai. Ensuite nous devons montrer que $(1-\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})=\frac{1-3\boldsymbol{i}}{1}$, ce qui revient à vérifier que $2+\boldsymbol{i}^2-3\boldsymbol{i}=1-3\boldsymbol{i}$ ou encore $1-3\boldsymbol{i}=1-3\boldsymbol{i}$, ce qui est trivialement vérifié.

Question 12.

(a) *Calculer*

- $\overline{1-\boldsymbol{i}}=1+\boldsymbol{i}$
- $\overline{2+3\boldsymbol{i}}=2-3\boldsymbol{i}$
- $\left|(1+\boldsymbol{i})^{10}\right|=|1+\boldsymbol{i}|^{10}=(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$ *($|z^n|=|z|^n$)*
- $\overline{(1-\boldsymbol{i})(2+3\boldsymbol{i})}=(1+\boldsymbol{i})(2-3\boldsymbol{i})=2-3\boldsymbol{i}^2+2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}=5-\boldsymbol{i}$ *($\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$)*

(b) *Donnez la forme trigonométrique de $1-\boldsymbol{i}$ et $\overline{1-\boldsymbol{i}}$.*

On a $|1-\boldsymbol{i}|=\sqrt{2}=|1+i|$. D'autre part $\operatorname{Arg}(1+\boldsymbol{i})=\frac{\pi}{4}$ et donc $\operatorname{Arg}\overline{1+\boldsymbol{i}}=\operatorname{Arg}(1-\boldsymbol{i})=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$. Par conséquent, $1-\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ et $1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.

(c) *En utilisant les propriétés vues au cours pour le conjugué, prouvez que, si $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}$ et si $z\in\mathbb{C}$ vérifie*

$$a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0 \tag{6}$$

alors

$$a_4\overline{z}^4+a_3\overline{z}^3+a_2\overline{z}^2+a_1\overline{z}+a_0=0. \tag{7}$$

Puisque tout nombre réel est égal à son conjugué et que $\overline{z}^n = \overline{z^n}$, on a

$$\begin{aligned}
a_4\overline{z}^4 + a_3\overline{z}^3 + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 &= \overline{a_4}\cdot\overline{z^4} + \overline{a_3}\cdot\overline{z^3} + \overline{a_2}\cdot\overline{z^2} + \overline{a_1}\cdot\overline{z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_4z^4} + \overline{a_3z^3} + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} && (\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}) \\
&= \overline{a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0} && (\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1+z_2}) \\
&= \overline{0} && (\text{grâce à } 6) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) *Déduire de (c) que si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et z est solution dans $\mathbb{C}$ de*

$$a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0 \tag{8}$$

alors $\overline{z}$ est également solution de (8)*.*

L'équation (6) affirme que z est solution de (8) tandis que (7) affirme que $\overline{z}$ est solution de (8). Donc (d) n'est qu'une autre façon d'exprimer (c).