Mathématique Élémentaire

Examen (4 janvier 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour chacun des complexes suivants, donnez ses parties réelle et imaginaire, son module et son argument. /4

- $z_1 = (2+3\boldsymbol{i})(3-4\boldsymbol{i})$
- $z_2 = 1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3$
- $z_3 = 3\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}\pi}(2+3\boldsymbol{i})$
- $z_4 = (1-\boldsymbol{i})^{10}$

Mathématique Élémentaire

Examen (4 janvier 2010)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. /7

(a) Donnez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln \sqrt{\dfrac{1}{|x|-1} - |x| + 2}$ sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

(b) Donnez une équation cartésienne de l'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sin t, \sin^2 t)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

/6

(a) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Prouvez par récurrence que $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \partial_x(x^n) \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$. /3

Question 5. Calculez les sommes suivantes : /2

- $\displaystyle\sum_{p=4}^{n+5} \sqrt{3}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{p=1}^{\ell^2+1} (k-p)$

Mathématique Élémentaire

Examen (4 janvier 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 6. Soient les ensembles

$$A := \left\{ \alpha \;\middle|\; \alpha \text{ est un plan perpendiculaire à la droite } D \equiv x-1 = \frac{2-y}{2} = 3z+1 \right\},$$

$$\text{et} \qquad B := \left\{ \beta \mid \beta \text{ est un plan dont un vecteur normal est } (-6,12,-2) \right\}.$$

(a) Soit le plan $\gamma \equiv 3x-6y+z=7$. A-t-on $\gamma \in A$? Justifiez.

(b) Soit le plan $\delta \equiv 6x-12y+2z=3$. A-t-on $\delta \in B$? Justifiez.

(c) Montrez que $A=B$. Détaillez votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section :

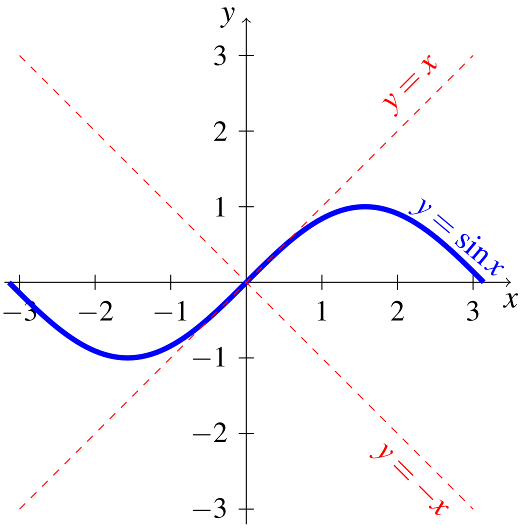
/4

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \sin x}.$$

(a) Montrez que $\operatorname{Dom} f = [0, +\infty[$. (Indication : le graphique ci-dessous peut vous aider.)

(b) Existe-t-il des points x tels que la tangente au graphe de f en x soit horizontale ? Si oui, donnez les tous. Justifiez en détail votre démarche.



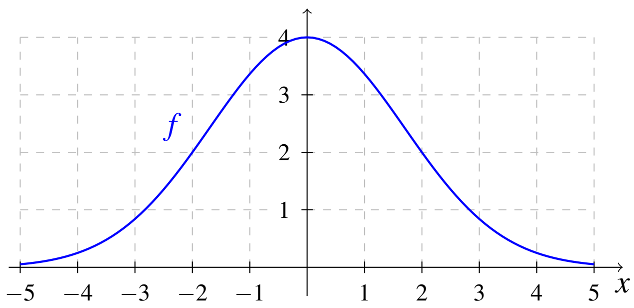
Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Écrivez le nombre complexe $\sum_{n=0}^{2006}(1+\boldsymbol{i})^n$ sous la forme $\alpha+\beta\boldsymbol{i}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. /5

Question 9. Soit $f:[-5,5]\to\mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A=\{x\in[-5,5] \mid x\leqslant 1\Rightarrow f(x)\leqslant 2\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. /3



Nom :

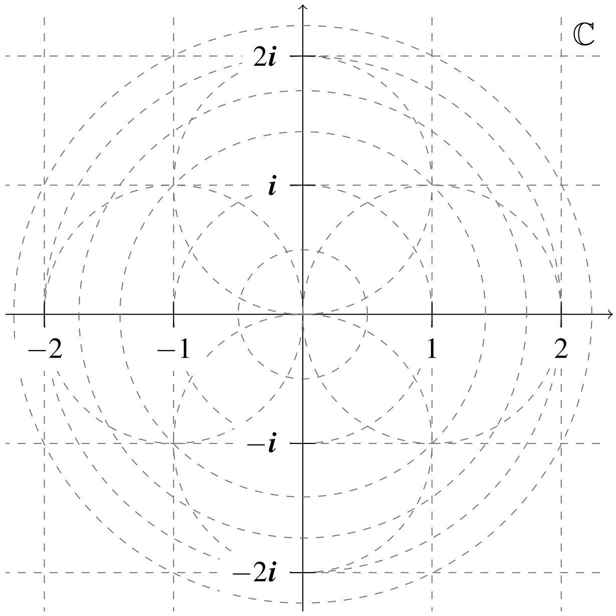
Prénom :

Section :

Question 10. Dans le corps des complexes, résolvez l'équation suivante de manière algébrique et graphique. /7

$$X^6 + 27 = 0$$

Veillez à la qualité de vos explications.



Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 11. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & b \\ 0 & a & a \\ b & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} c & 0 & ac \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Calculez $AB - BA$.

(b) Calculez $\text{dét}(AB - BA)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

/5

(a) Calculez détA. Pour quelles valeurs de m peut-on calculer A^{-1} ?

(b) Pour le ou les m qui annulent détA, donnez l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 13. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $m_{ij} = (i^2 - j^2)(i + j)^3$. /3

(a) Montrez que la matrice M est antisymétrique.

(b) Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$. Expliquez votre démarche.