Mathématique Élémentaire

Examen (9 juin 2010)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soient les matrices /4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez AB, $\operatorname{dét} C$ et $\operatorname{dét}(DE)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Calculez, en explicitant vos calculs : /4

- $\sum_{u=0}^{\ell}(u+1)$
- $\sum_{n=2}^{t} 2$
- $\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}(u-v)^2$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soient les ensembles

/8

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y,z) \text{ est un vecteur simultanément orthogonal aux vecteurs } (-1,3,-2) \text{ et } (1,-4,-1)\right\},$$

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y,z) \text{ est un vecteur directeur de la droite } D \equiv \frac{x}{13} = \frac{y+2}{3} = z-1\right\}.$$

(a) A-t-on

- $(0,0,0) \in A$?

  Oui/non car ....

  ....

- $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}\right) \in A$?

  Oui/non car ....

  ....

- $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{13}, \frac{\sqrt{2}}{13}\right) \in B$?

  Oui/non car ....

  ....

(b) Décrivez géométriquement l'ensemble A.

(c) A-t-on $A \subseteq B$?

(d) A-t-on $B \subseteq A$?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par $A_{ij} = (\ln i - \ln j)^3 \cdot (i + j)^2$. /4

(a) Montrez que A est antisymétrique.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 5. Soit le système

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$. On suppose que $ab' - a'b \neq 0$.

(a) Montrez que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

Expliquez votre démarche.

(b) Montrez que le système (1) possède une et une seule solution qui s'écrit

$$\left(\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \right)$$

Argumentez clairement et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 6. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel. Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles M est inversible ? Si oui, donnez les toutes et calculez l'inverse de M pour ces λ.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. /7

(a) Calculer

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} =$
- $\overline{2+3\boldsymbol{i}} =$
- $\left|(1+\boldsymbol{i})^{10}\right| =$
- $\overline{(1-\boldsymbol{i})(2+3\boldsymbol{i})} =$

(b) Donnez la forme trigonométrique de $1-\boldsymbol{i}$ et $\overline{1-\boldsymbol{i}}$.

(c) En utilisant les propriétés vues au cours pour le conjugué, prouvez que, si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et si $z \in \mathbb{C}$ vérifie

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2}$$

alors

$$a_4 \bar{z}^4 + a_3 \bar{z}^3 + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0 = 0. \tag{3}$$

(d) Déduire de (c) que si $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ et z est solution dans $\mathbb{C}$ de

$$a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = 0 \tag{4}$$

alors $\bar{z}$ est également solution de (4).

Mathématique Élémentaire

Examen (9 juin 2010)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. /7

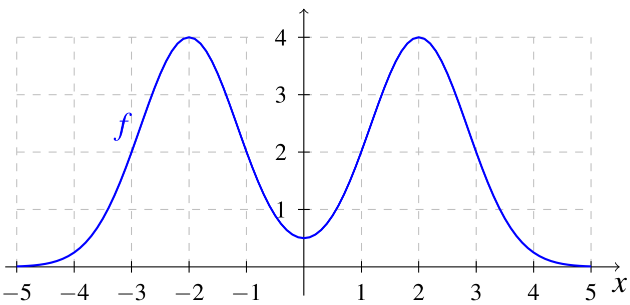
(a) Donnez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln \sqrt{\dfrac{4}{|x|-2} - |x| + 5}$ sous la forme d'une union d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

(b) Donnez une équation cartésienne de l'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos^2 t, \cos^3 t)$. Veillez à justifier toutes les étapes de vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 9. Soit $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \left\{x \in [-5,5] \;\middle|\; x \leqslant 2 \Rightarrow f(x) \leqslant 2\right\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche. /3



Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. /7

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

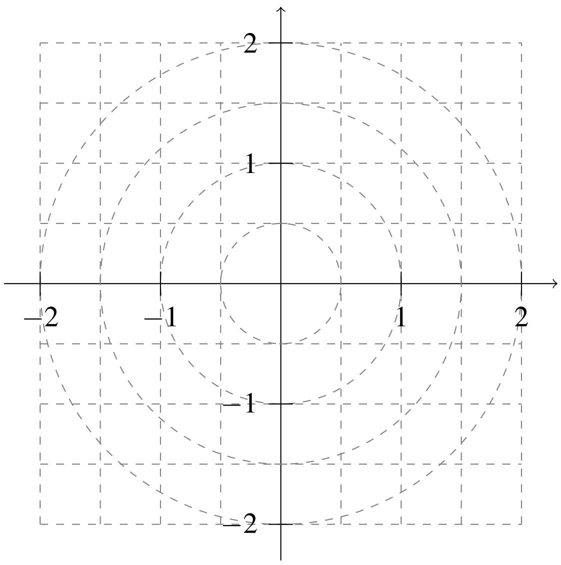
Question 11. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes :

/6

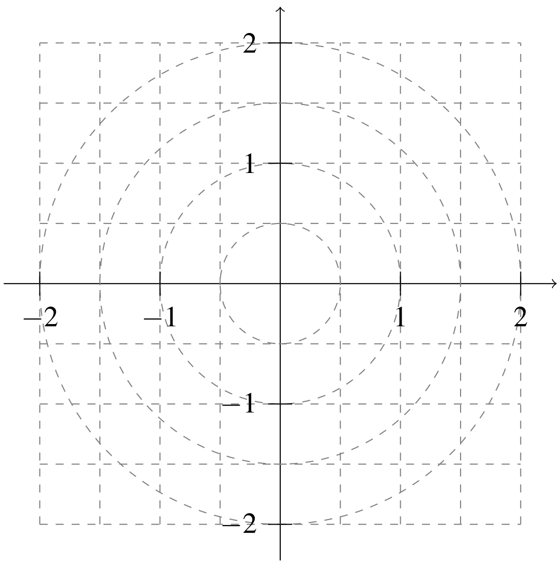
(a) $X^3+1=0$

(b) $X^5+X^2=0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^3+1=0$



Solutions de $X^5+X^2=0$