

Mathématique Élémentaire

Examen

(18 août 2010)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées, voire pas corrigées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre* question pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■ $\sum_{v=-3}^j v(v+2)$

■ $\sum_{k=4}^n 4$

■ $\sum_{k=0}^t \sum_{\ell=0}^t (k^2 - \ell^2 + 1)$

/ 5

Question 2. Écrivez sous forme trigonométrique $8 - (8\sqrt{3})i$.

/3

Mettez sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\frac{2 - 4i}{4 - 3i}$.

Calculez $\left| \frac{(2 - 4i)^2}{4 - 3i} \right|$.

Question 3. Calculez les déterminants suivants :

/3

■ $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■ $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. La proposition suivante est-elle une tautologie ?

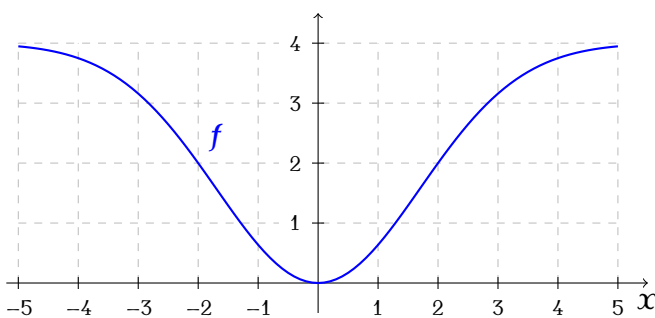
$$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$$

Justifiez votre réponse.

/3

Question 5. Soit $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Écrivez l'ensemble $A = \{x \in [-5, 5] : f(x) \leq 2 \Rightarrow x \leq 0\}$ sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. Expliquez votre démarche.

/3



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Soit le plan α d'équation $\alpha \equiv 2x - 3y - z = -6$ et le point p de coordonnées $(0, 1, -8)$.

/6

- (a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α .
- (b) Recherchez, s'il existe, le point d'intersection entre la droite D et le plan α .

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

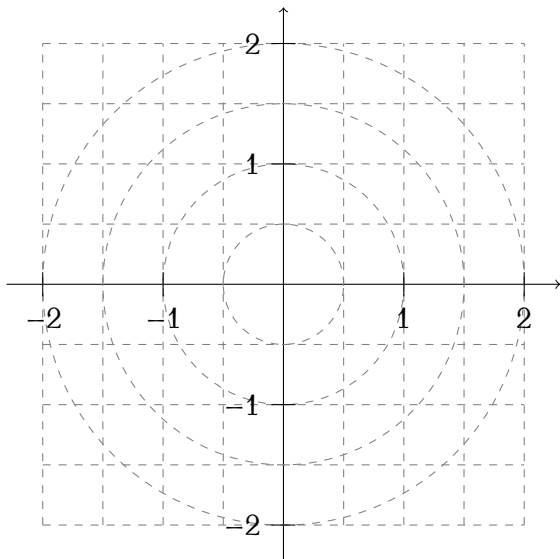
Question 7. Calculez, dans \mathbb{C} , sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes :

/6

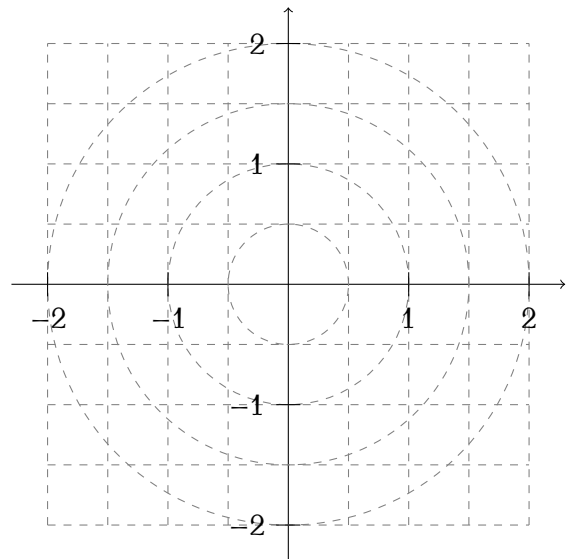
(a) $X^4 + 1 = 0$

(b) $X^6 + X^2 = 0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^4 + 1 = 0$



Solutions de $X^6 + X^2 = 0$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel. Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles M est inversible ? Si oui, donnez les toutes et calculez l'inverse de M pour ces λ .

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9.

/5

- (a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».
- (b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.
- (c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = 1 \\ \sin \theta x + \cos \theta y = 1 \end{cases}$$

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 10. Donnez, sous la forme d'une union d'intervalles disjoints (moins il y en a, mieux c'est), le domaine de définition de la fonction

/7

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{x\sqrt{x+2}}\right).$$

INDICATION : Si un polynôme $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ vérifie $p(-1) = 0$, alors $p(x) = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ qu'on peut trouver en résolvant un système linéaire 2×2 .

Mathématique Élémentaire

Examen

(18 août 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 2^i & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

(a) Calculez $\sum_{i=1}^n A_{ii}$.

(b) Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}$.

/ 4

Question 12. Soient les ensembles

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^7 = 1 + 2i\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de l'équation } Z^{14} = -3 + 4i\}.$$

Montrez, sans résoudre les équations, que $A \subseteq B$.

/ 4