

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(21 septembre 2009)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer

■ $1 + 3i =$

■ $|1 + 3i|^2 =$

■ $(1 + 3i) \cdot (4 - 9i) =$

■ $i^{-1} =$

■ $\left(\frac{1 - \sqrt{2}i}{2}\right)^{-1} =$

/5

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (21 septembre 2009)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Prouver que $2 + i$ est solution de l'équation $X^2 - (1 - i)X - 5i = 0$.

/ 2

Question 3. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^2 - 7X + 13 = 0$.

/ 3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Soient les vecteurs $u = (-1, -3, 2)$ et $v = (0, 1, 4)$. Calculez

■ $(u|v) =$

■ $\|2u - v\| =$

■ la distance entre u et v .

Question 5. Donnez les composantes du vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ dont la norme vaut 2 et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad avec l'axe des x . Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/3

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/6

Question 6. Soit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 six naturels distincts. On considère l'ensemble S des sommes de deux éléments de la forme $x_i + x_j$ avec $i < j$.

On a vu au cours qu'il y aura au plus 15 valeurs distinctes pour les sommes $x_i + x_j$.

- (a) Prouver que, quel que soit le choix des valeurs naturelles pour x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 , il y aura toujours au moins 9 sommes de valeurs distinctes parmi les sommes d'éléments de S .
- (b) Donner un exemple où il y en a exactement neuf distinctes.
- (c) Donner un exemple où il y en a exactement quinze distinctes.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Calculez $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, en donnant une règle en fonction de n . Prouvez votre formule.

/6

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8. Soient u, v deux vecteurs de \mathbb{R}^N et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrez que $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. Veillez à citer les propriétés que vous utilisez.
- (b) Montrez que $(u|u) = \|u\|^2$.
- (c) Montrez que $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$. Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.

Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (21 septembre 2009)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Vérifier que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est solution de l'équation $X^3 - 2X - 1 = 0$.

/2