Mathématique Élémentaire

Test n° 2 (21 septembre 2009) Correction

Question 1. *Calculer*

- $\overline{1+3\boldsymbol{i}} = 1-3\boldsymbol{i}$
- $|1+3\boldsymbol{i}|^2 = 1^2+3^2 = 10$
- $(1+3\boldsymbol{i})\cdot(4-9\boldsymbol{i}) = 4-27\boldsymbol{i}^2+(12-9)\boldsymbol{i} = 31+3\boldsymbol{i}$
- $\boldsymbol{i}^{-1} = -\boldsymbol{i}$ *(car* $-\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$*)*
- $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}\boldsymbol{i}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{\overline{(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i})}}{|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}|^2} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}}{3/4} = \dfrac{2}{3}(1+\sqrt{2}\boldsymbol{i})$

Question 2. *Prouver que* $2+\boldsymbol{i}$ *est solution de l'équation* $X^2-(1-\boldsymbol{i})X-5\boldsymbol{i}=0$.

Il suffit de vérifier que $(2+\boldsymbol{i})^2-(1-\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i})-5\boldsymbol{i}=0$. Le premier membre est égal à $4+\boldsymbol{i}^2+4\boldsymbol{i}-(2-\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i})-5\boldsymbol{i} = 3+4\boldsymbol{i}-(3-\boldsymbol{i})-5\boldsymbol{i}=0$.

Question 3. *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$, *l'équation* $X^2-7X+13=0$.

Le discriminant de cette équation est égal à $(-7)^2-4\cdot 9\cdot 13 = 49-52=-3$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2=-3$ et a pour solutions $y_1=\boldsymbol{i}\sqrt{3}$ et $y_2=-\boldsymbol{i}\sqrt{3}$. Il s'ensuit (par la théorie vue au cours) que les solutions de l'équation de départ sont $x_1=\dfrac{7+\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{7-\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2}$.

Question 4. *Soient les vecteurs* $u=(-1,-3,2)$ *et* $v=(0,1,4)$. *Calculez*

- $(u|v) = -1\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 4 = 0-3+8=5$
- $\|2u-v\|$

  On a $2u-v=(-2,-6,4)-(0,1,4)=(-2,-7,0)$. Donc $\|2u-v\| = \sqrt{(-2)^2+(-7)^2} = \sqrt{4+49}=\sqrt{53}$.

- *la distance entre u et v*

  $\mathrm{dist}(u,v) = \sqrt{(-1-0)^2+(-3-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}.$

Question 5. *Donnez les composantes du vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ dont la norme vaut 2 et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad avec l'axe des x. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On a vu au cours que si $v \neq 0$, alors $v/\|v\|$, c'est-à-dire ici $v/2$, est de norme 1. C'est donc un point du cercle trigonométrique. Un tel point a pour coordonnée $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec ici $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad. Donc $\frac{v}{2} = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Il s'ensuit que $v = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Question 6. *Soit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 six naturels distincts. On considère l'ensemble S des sommes de deux éléments de la forme $x_i + x_j$ avec $i < j$.*
On a vu au cours qu'il y aura au plus 15 valeurs distinctes pour les sommes $x_i + x_j$.

(a) *Prouver que, quel que soit le choix des valeurs naturelles pour x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6, il y aura toujours au moins 9 sommes de valeurs distinctes parmi les sommes d'éléments de S.*

(b) *Donner un exemple où il y en a exactement neuf distinctes.*

(c) *Donner un exemple où il y en a exactement quinze distinctes.*

(a) Les x_i's sont des éléments de $\mathbb{N}$, qui admet un ordre, on peut donc supposer (après avoir éventuellement renommer les éléments) que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est compatible avec l'addition (càd $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $a < b \Rightarrow c + a < c + b$), nous obtenons que $x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ entraîne

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_1 + x_6. \tag{1}$$

De plus $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ entraîne

$$x_1 + x_6 < x_2 + x_6 < x_3 + x_6 < x_4 + x_6 < x_5 + x_6. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) fournissent par transitivité 9 éléments du type « somme $x_i + x_j$ avec $i < j$ » tous distincts.

(b) Si $x_i = i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, 6$), la somme minimale est $x_1 + x_2 = 3$ et la somme maximale est $x_5 + x_6 = 11$. Puisque toutes les sommes $x_i + x_j$ $(i < j)$ vérifient $x_1 + x_2 \leqslant x_i + x_j \leqslant x_5 + x_6$ et appartiennent à $\mathbb{N}$, celles-ci sont parmi les 9 naturels de l'intervalle $[3, 11]$. Et comme le nombre de sommes distinctes (par le point (a)) est au minimum 9, il y a exactement 9 sommes distinctes dans ce cas-ci.

(c) En choisissant des écarts suffisamment croissants entre les x_i's, on obtient 15 sommes distinctes. Par exemple $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7, x_5 = 12, x_6 = 20$.

+	1	2	4	7	12	20
1	/	3	5	8	13	21
2		/	6	9	14	22
4			/	11	16	24
7				/	19	27
12					/	32
20						/

Question 7. *Calculez* $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$*, pour* $n \in \mathbb{N}$*, en donnant une règle en fonction de n. Prouvez votre formule.*

On remarque que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + i^2\frac{\sqrt{3}^2}{2^2} + i\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3)\end{aligned}$$

et que $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est de la forme $-z\bar{z}$, càd $-|z|^2$ qui dans ce cas-ci vaut $-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = -1$. Il s'ensuit que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vu (3)). Finalement nous avons $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -1\cdot(-1) = 1$. En effectuant la division entière de n par 6, on peut écrire $n = q\cdot 6 + r$ avec $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{6q}\cdot\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r\\ &= \left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6\right)^q\cdot\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^r.\end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n \bmod 6}$.

Question 8. *Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(a) *Montrez que $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$. Veillez à citer les propriétés que vous utilisez.*

(b) *Montrez que $(u|u) = \|u\|^2$.*

(c) *Montrez que $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$. Expliquez votre démarche et citez les propriétés que vous utilisez.*

Posons $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$.

(a) On a :

$$\begin{aligned}
\alpha(u+v) &= \alpha\big((u_1,\dots,u_N) + (v_1,\dots,v_N)\big) && \text{(définition de } u \text{ et } v\text{).}\\
&= \alpha(u_1+v_1,\dots,u_N+v_N) && \text{(addition de deux vecteurs)}\\
&= \big(\alpha(u_1+v_1),\dots,\alpha(u_N+v_N)\big) && \text{(multiplication d'un vecteur d'un réel)}\\
&= (\alpha u_1+\alpha v_1,\dots,\alpha u_N+\alpha v_N) && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}\text{)}\\
&= (\alpha u_1,\dots,\alpha u_N) + (\alpha v_1 + \alpha v_N) && \text{(addition de deux vecteurs)}\\
&= \alpha u + \alpha v && \text{(multiplication d'un vecteur d'un réel)}
\end{aligned}$$

(b) Fait au cours.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
&\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\\
&= (u+v|u+v) + (u-v|u-v) && \text{(par (b))}\\
&= (u|u+v) + (v|u+v) + (u|u-v) - (v|u-v) && \text{(car } (x \pm y|z) = (x|z) \pm (y|z)\text{)}\\
&= (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v) + (u|u) - (u|v) - (v|u) + (v|v)\\
&\qquad \text{(car } (x|y+z) = (x|y) + (x|z) \text{ et } \alpha(x|y) = (\alpha x|y) = (x|\alpha y) \text{ lorsque } \alpha \in \mathbb{R}\text{)}\\
&= (u|u) + (v|v) + (u|u) + (v|v)
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant de nouveau (b), nous obtenons $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

Question 9. *Vérifier que* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *est solution de l'équation* $X^3 - 2X - 1 = 0$.

Il suffit de substituer $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ à X dans l'équation et donc de vérifier que

$$\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^3 - 2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \tag{4}$$

en évaluant le premier membre de cette égalité. On a

$$\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{5}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} && \text{par (5)} \\
&= 2\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + 1.
\end{aligned}$$

On voit donc clairement que l'équation (4) est satisfaite.