

Mathématique Élémentaire

Test n° 3

(28 septembre 2009)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Prouver que

■ $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$

/ 4

■ $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}^n| = |z|^n, n \geq 0$ (ne pas utiliser la récurrence)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/ 4

Question 2. Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

(a) Que vaut le déterminant de ce système ?

(b) Supposons que le déterminant du système soit non nul. Prouvez que $\left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$ est l'unique solution du système.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

■ $\sin 45^\circ + i \cos 45^\circ$

■ $\cos \frac{22\pi}{7} + i \sin \frac{22\pi}{7}$

/2

Question 4. Calculer. Votre calcul doit être économique, c'est-à-dire utiliser les propriétés vues au cours pour éviter les calculs inutiles. Justifiez votre calcul en mentionnant la propriété utilisée.

■ $|3(\sin 73^\circ + i \cos 73^\circ)| =$

■ $|-3| =$

■ $|1 + 2i| =$

■ $|(1 + 2i)^8| =$

/4

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5.

- (a) Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(-3, -1)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv y - 3x = 4$.
- (b) Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par les points $(4, -5)$ et $(-2, -4)$.
- (c) Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 passant par le point $(-\sqrt{5}, \sqrt{2})$ et parallèle à l'axe des y .

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Quel est l'objet géométrique donné par l'ensemble

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = -z\}$

(c) $\{(\alpha + 1, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

/7

Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (28 septembre 2009)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.

Question 7. Prouver par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

/ 4

Question 8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

Vrai : Faux : Le point $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$ appartient à la droite $D \equiv (x, y) = (3, 0) + \lambda(-5, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vrai : Faux : Le vecteur $(\pi, 2\pi)$ est un vecteur directeur de la droite $D \equiv 2x = y + 3$.

Vrai : Faux : Le système $\begin{cases} 10^{23}x - \sqrt{2}y = 0 \\ 3^{2009}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ n'est jamais impossible.

Vrai : Faux : Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (7, -1) + \lambda(-3, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $D_2 \equiv \frac{2}{3}x + y = 0$ sont parallèles.

/6