Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (28 septembre 2009) **Correction**

Question 1. *Prouver que*

- $\forall z \in \mathbb{C},\ |\bar{z}| = |z|$
  Posons $z = a + bi$, on a $\bar{z} = a - bi$ et, par définition de $|\cdot|$, $|a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

- $\forall z \in \mathbb{C},\ |\overline{z^n}| = |z|^n,\ n \geqslant 0$ *(ne pas utiliser la récurrence)*
  Par le point précédent, $|\overline{z^n}| = |z^n|$ ce qui est égal à $|z|^n$ (par une propriété de $|\cdot|$ vue au cours).

Question 2. *Soit le système de deux équations à deux inconnues*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

(a) *Que vaut le déterminant de ce système ?*

(b) *Supposons que le déterminant du système est non nul. Prouvez que $\left(\dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$ est l'unique solution du système.*

(a) Le déterminant dy système est

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

(b) On a vu au cours que lorsque le déterminant du système est non nul, le système a une solution unique. Prouvons que $\left(\dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$ vérifie les deux équations du système. Pour cela on remplace x par $\dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$ et y par $\dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$ dans chaque équation. Dans la première équation, on a :

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} + b \cdot \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} &= \frac{ab'c - abc' + abc' - a'bc}{ab' - a'b} \\ &= \frac{c(ab' - a'b)}{ab' - ab'} \qquad \text{(par distributivité)} \\ &= c \qquad \text{(on peut simplifier car } ab' - a'b \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

La première équation est donc vérifiée. Dans la seconde équation, nous avons :

$$\begin{aligned}
a' \cdot \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} + b' \cdot \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} &= \frac{a'b'c - a'bc' + ab'c' - a'b'c}{ab' - a'b} \\
&= \frac{c'(ab' - a'b)}{ab' - ab'} && \text{(par distributivité)} \\
&= c' && \text{(on peut simplifier car } ab' - a'b \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

La deuxième équation est donc vérifiée aussi.

Question 3. *Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :*

- $\sin 45^\circ + \boldsymbol{i} \cos 45^\circ$

  $45^\circ = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi[$ et donc $\sin 45^\circ + \boldsymbol{i} \cos 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i} \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i} \sin \frac{\pi}{4}$ (car $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$).

- $\cos \frac{22\pi}{7} + \boldsymbol{i} \sin \frac{22\pi}{7}$

  $\frac{22\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} + \frac{8\pi}{7} = 2\pi + \frac{8\pi}{7}$, càd $\frac{22\pi}{7} \bmod 2\pi = \frac{8\pi}{7}$.
  Donc $\cos \frac{22\pi}{7} + \boldsymbol{i} \sin \frac{22\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7} + \boldsymbol{i} \sin \frac{8\pi}{7}$.

Question 4. *Calculer. Votre calcul doit être économique, c'est-à-dire utiliser les propriétés vues au cours pour éviter les calculs inutiles. Justifiez votre calcul en mentionnant la propriété utilisée.*

- $|3(\sin 73^\circ + \boldsymbol{i} \cos 73^\circ)|$

  $|3(\sin 73^\circ + \boldsymbol{i} \cos 73^\circ)| = |3| \cdot |\sin 73^\circ + \boldsymbol{i} \cos 73^\circ| = 3 \cdot 1 = 3$ (car $\sin 73^\circ + \boldsymbol{i} \cos 73^\circ$ appartient au cercle trigonométrique).

- $|-3| = 3$

  $|-3| = 3$ car $-3 \in \mathbb{R}$ et donc dans ce cas le module est égal à la valeur absolue.

- $|1 + 2\boldsymbol{i}|$

  $|1 + 2\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

- $|(1 + 2\boldsymbol{i})^8|$

  $|(1 + 2\boldsymbol{i})^8| = |1 + 2\boldsymbol{i}|^8$ par la propriété $|z^n| = |z|^n$ vue précédemment. Donc $|(1 + 2\boldsymbol{i})^8| = \sqrt{5}^8 = 5^4$.

Question 5.

(a) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_1 passant par le point $(-3,-1)$ et perpendiculaire à la droite $D \equiv y - 3x = 4$.*

Un vecteur normal de D est $(-3,1)$. Un vecteur normal de D_1, noté (a,b), sera donc orthogonal à $(-3,1)$ car les droites sont perpendiculaires. Prenons $(a,b) = (1,3)$, on a bien $((1,3) \mid (-3,1)) = -3+3 = 0$.

Donc $D_1 \equiv x+3y = c$. Pour trouver c, on sait que $(-3,-1) \in D_1$. Remplaçons x par -3 et y par -1, nous obtenons $-3+3(-1) = c$ càd $c = -6$.

Donc $D_1 \equiv x+3y = -6$.

(b) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_2 passant par les points $(4,-5)$ et $(-2,-4)$.*

On a vu au cours qu'un vecteur directeur de D_2 est donné par $(-2-4,-4+5) = (-6,1)$.

Donc $D_2 \equiv (x,y) = (4,-5)+\lambda(-6,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_3 passant par le point $(-\sqrt{5},\sqrt{2})$ et parallèle à l'axe des y.*

Comme D_3 est parallèle à l'axe des y, un vecteur directeur est $(0,1)$. $D_3 \equiv (x,y) = (-\sqrt{5},\sqrt{2})+\lambda(0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 6. *Quel est l'objet géométrique donné par l'ensemble*

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 3\}$

$|z+1| = 3$ est équivalent à $|z-(-1)| = 3$. Posons $z = a+b\boldsymbol{i}$, on obtient $|a+b\boldsymbol{i}-(-1+0\boldsymbol{i})| = 3$, càd $|a-(-1)+b\boldsymbol{i}| = 3$, ou encore $\sqrt{(a-(-1))^2+(b-0)^2} = 3$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 3\}$ est donc le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 3.

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = -z\}$

$|z|$ étant un réel positif ou nul, l'égalité $|z| = -z$ n'est possible que si $-z$ est lui-même un réel positif ou nul, et dans ce cas on a bien que $|z| = -z$. Donc on a $|z| = -z$ ssi $-z \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ssi $z \in \mathbb{R}^{\leq 0}$. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| = -z\}$ est donc la demi-droite des réels négatifs ou nuls.

(c) $\{(\alpha+1,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

L'ensemble est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de la forme $(\alpha+1,\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $y = \alpha$ et par conséquent $x = \alpha+1 = y+1$. Donc l'ensemble est formé des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation $x = y+1$, càd $x-y = 1$. Il s'agit de la droite passant par les points $(1,0)$ et $(0,-1)$.

Question 7. *Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,*

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

- Cas de base $n=1$: l'égalité (1) se ramène à $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, ce qui est clairement vérifié.
- L'étape de récurrence : supposons que (1) est prouvée pour les naturels n tels que $1 \leq n \leq k$, $k \geqslant 1$.

  Sous cette hypothèse, prouvons que l'égalité (1) est vérifiée pour $n = k+1$. Le premier membre de (1) est $1+2+\ldots+k+(k+1)$ ce qui, par hypothèse de récurrence (pour $n=k$), est égal à

  $$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

  ce qui prouve bien l'égalité (1) dans le cas où $n = k+1$.

Question 8. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.*

- *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le point* $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$ *appartient à la droite* $D \equiv (x,y) = (3,0) + \lambda(-5,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Cela revient à savoir s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\frac{5}{2}, \frac{1}{5}) = (3,0) + \lambda(-5,2)$ càd $\frac{5}{2} = 3 - 5\lambda$ (1) et $\frac{1}{5} = 2\lambda$ (2) par les opérations sur les vecteurs. De (2), on tire $\lambda = \frac{1}{10}$ et dans (1), on a $3 - \frac{5}{10} = \frac{5}{2}$. Comme (1) et (2) sont satisfaites, le point $(\frac{5}{2}, \frac{1}{5}) \in D$. Il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{10}$.

- *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le vecteur* $(\pi, 2\pi)$ *est un vecteur directeur de la droite* $D \equiv 2x = y+3$.

  On a $D \equiv 2x - y = 3$. Donc $(2,-1)$ est un vecteur normal de D. Le vecteur $(\pi, 2\pi)$ sera un vecteur directeur de D s'il est orthogonal à $(2,-1)$. On a $((2,-1) \mid (\pi, 2\pi)) = 2\pi - 2\pi = 0$. Donc $(\pi, 2\pi)$ est un vecteur directeur de D.

- *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Le système* $\begin{cases} 10^{23}x - \sqrt{2}y = 0 \\ 3^{2009}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ *n'est jamais impossible.*

  Le point $(0,0)$ est solution du système. En effet, remplaçons dans chaque équation x et y par 0, nous obtenons $10^{23} \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot 0 = 0$ et $3^{2009} \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot 0 = 0$. Les deux équations sont donc satisfaites.

- *Vrai :* ☑ *Faux :* ☐ *Les droites* $D_1 \equiv (x,y) = (7,-1) + \lambda(-3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $D_2 \equiv \frac{2}{3}x + y = 0$ *sont parallèles.*

  Un vecteur directeur de D_1 est $(-3,2)$ et un vecteur normal de D_2 est $(\frac{2}{3}, 1)$. Les deux droites seront parallèles si ces deux vecteurs sont orthogonaux. On a $\big((-3,2) \mid (\frac{2}{3}, 1)\big) = -2 + 2 = 0$. Donc les deux droites sont parallèles.