

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(5 octobre 2009)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si possible :

■ $-i \begin{pmatrix} i & 3-i \\ (1-i)^2 & i^{-5} \end{pmatrix} =$

■ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} =$

■ $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

■ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$

/5

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(5 octobre 2009)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 2. Soient le point $p = (4, -2, 1)$, la droite $D \equiv -x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ et le plan $\alpha \equiv x - z = 2$. Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point p , parallèle à la droite D et perpendiculaire au plan α . Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

/ 4

Question 3. Donnez la contraposée et la négation de la phrase suivante : « Si je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire ».

/ 3

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Soit $1 + i$ une solution de l'équation $X^5 = -4 - 4i$ (vous ne devez pas le vérifier).
Donner toutes les solutions complexes de l'équation $X^5 = -4 - 4i$ sous forme trigonométrique.

/5

Question 5. Montrez que la proposition $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.¹

/3

¹La règle ci-dessus et $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ s'appellent règles de distributivité.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/6

Question 6. Décrivez géométriquement les ensembles suivants. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.

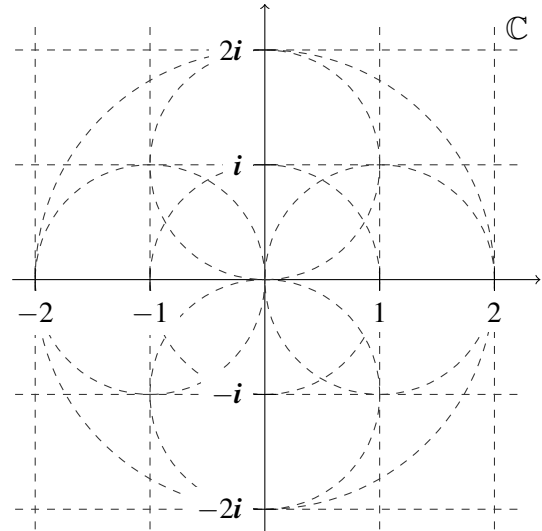
(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \text{ est orthogonal à } (3, -1)\}$

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\lambda - 1, 2 + 3\lambda, -8) \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}\}$

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution de l'équation } -x + 2y + 5z = 7\}$

Question 7. Calculez et représentez sur le dessin ci-dessous les solutions de l'équation $X^8 = 1$.
 Donnez les solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
 Explicitez la totalité du raisonnement suivi pour arriver aux solutions.

/ 4



Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 8. Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x + \lambda y = 2\lambda \\ \lambda x + y = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/ 3

Question 9. Soient les propositions P , Q , et R définies par

- P : l'argument du nombre complexe $\sqrt{2}(\sin \pi + i \cos \pi)$ est π .
- Q : les droites d'équations $x + y = 1$ et $-42y = 42x - 42$ ont au moins un point d'intersection.
- R : l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

La proposition $(P \vee Q) \wedge R$ est-elle vraie ou fausse ? Expliquez votre démarche.