Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (5 octobre 2009) **Correction**

Question 1. *Calculez, si possible :*

- $-\boldsymbol{i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 3-\boldsymbol{i} \\ (1-\boldsymbol{i})^2 & \boldsymbol{i}^{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}^2 & -\boldsymbol{i}(3-\boldsymbol{i}) \\ -\boldsymbol{i}(1-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2) & -\boldsymbol{i}^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2 \\ -1(-2\boldsymbol{i}) & -(\boldsymbol{i}^4)^{-1} \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 1 & -1-3\boldsymbol{i} \\ -2 & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-3)+2(-2)+5(-1) \\ -2(-3)+4(-2)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4-5 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-1) & -3(-2) & -3(-3) \\ -2(-1) & -2(-2) & -2(-3) \\ -1(-1) & -1(-2) & -1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ = Impossible car le nombre de colonnes de la première matrice n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

Question 2. *Soient le point $p = (4,-2,1)$, la droite $D \equiv -x = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z}{3}$ et le plan $\alpha \equiv x - z = 2$. Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point p, parallèle à la droite D et perpendiculaire au plan α. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Une équation cartésienne de β est de la forme $ax+by+cz=d$ où (a,b,c) est un vecteur normal. Comme $p \in \beta$, on a, en remplaçant x par 4, y par -2 et z par 1 : $4a-2b+c=d$ (1). Puisque $D \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$, $(-1,-2,3)$ est un vecteur directeur de cette droite. Comme β est parallèle à D, les vecteurs $(-1,-2,3)$ et (a,b,c) sont orthogonaux, càd $\big((-1,-2,3) \mid (a,b,c)\big) = 0$, càd $-a-2b+3c=0$ (2). Un vecteur normal de α est $(1,0,-1)$. Comme α et β sont perpendiculaires, les vecteurs (a,b,c) et $(1,0,-1)$ sont orthogonaux. On en déduit que $a-c=0$, càd $a=c$. En remplaçant dans (2), on a $-c-2b+3c=0$ càd $2c-2b=0$ càd $b=c$. En remplaçant dans (1), on a : $4c-2c+c=d$ càd $d=3c$. Prenons $c=1$, nous obtenons $a=1$, $b=1$ et $d=3$. Donc $\beta \equiv x+y+z=3$.

Question 3. *Donnez la contraposée et la négation de la phrase suivante : « Si je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire ».*

On a une phrase du type $A \Rightarrow B$ où

A : je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires

B : je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire.

On a vu au cours que la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$ et la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$. On obtient donc
Contraposée : Si je rate l'examen de Mathématique Élémentaire alors je ne suis pas capable de résoudre tous les exercices supplémentaires.
Négation : Je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires et [malgré tout] je rate l'examen de Mathématique Elémentaire.

Question 4. *Soit $1+\boldsymbol{i}$ une solution de l'équation $X^5 = -4-4\boldsymbol{i}$ (vous ne devez pas le vérifier). Donner toutes les solutions complexes de l'équation $X^5 = -4-4\boldsymbol{i}$ sous forme trigonométrique.*

Puisque $1+\boldsymbol{i}$ sous forme trigonométrique est égal à $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, les solutions de $X^5 = 1$ sont $\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{5}\right)$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Par le cours, on sait que les solutions de $X^5 = -4-4\boldsymbol{i}$ sont obtenues en multipliant $1+\boldsymbol{i}$ (une solution particulière) par les solutions de $X^5 = 1$. Il s'ensuit que les solutions de $X^5 = -4-4\boldsymbol{i}$ sont $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}k\frac{2\pi}{5}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Càd (sous forme trigonométrique) $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{13}{20}\pi$, $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{21}{20}\pi$, $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{29}{20}\pi$, $\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{37}{20}\pi$.

Question 5. *Montrez que la proposition $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.*[1]

Première méthode : montrons que la table de vérité de la proposition (que nous noterons P) n'est constituée que de 1.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	P
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

[1] La règle ci-dessus et $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ s'appellent règles de distributivité.

Deuxième méthode : Démontrons-le par calcul.
On a (vu la définition de $\Rightarrow$) que $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ a même table de vérité que $\neg\big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big) \vee B$, ce qui par les lois de De Morgan est équivalent (c'es-à-dire a même table de vérité que) à $\big(\neg A \vee \neg(A \Rightarrow B)\big) \vee B$ càd $\big(\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)\big) \vee B$, ou encore $\big(\neg A \vee (A \wedge \neg B)\big) \vee B$. Par distributivité, on obtient $\big[\underbrace{(\neg A \vee A)}_{\text{tjs vrai}} \wedge (\neg A \vee \neg B)\big] \vee B$ càd $(\neg A \vee \neg B) \vee B$ càd $\neg A \vee \underbrace{\neg B \vee B}_{\text{tjs vrai}}$ qui est bien une tautologie.

Question 6. *Décrivez géométriquement les ensembles suivants. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.*

(a) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \text{ est orthogonal à } (3,-1)\big\}$

(b) $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z) = (\lambda - 1, 2 + 3\lambda, -8) \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}\big\}$

(c) $C = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1,x_2,x_3) \text{ est solution de l'équation } -x + 2y + 5z = 7\big\}$

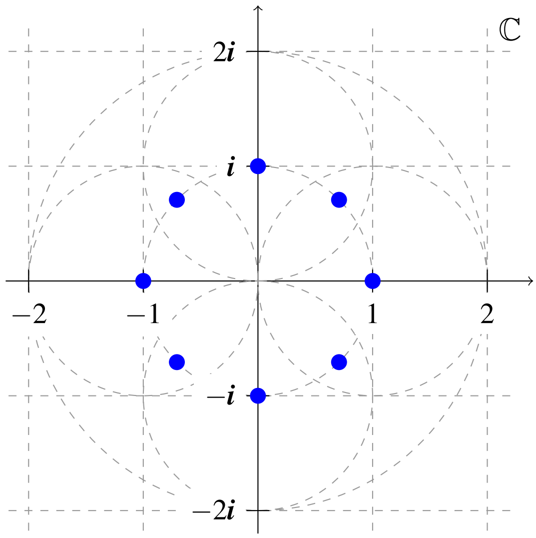
(a) L'ensemble A est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\big((x,y) \mid (3,-1)\big) = 0$ càd $3x - y = 0$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 3x$. Cette droite passe par les points $(0,0)$ et $(1,3)$.

(b) L'ensemble B est constitué des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x,y,z) = (-1,2,-8) + \lambda(1,3,0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la droite dont une équation paramétrique est $(x,y,z) = (-1,2,-8) + \lambda(1,3,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette droite passe par le point $(-1,2,-8)$ et admet $(1,3,0)$ comme vecteur directeur.

(c) L'équation $-x + 2y + 5z = 7$ est celle d'un plan. L'ensemble C est constitué des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui appartiennent au plan d'équation $-x + 2y + 5z = 7$. Un vecteur normal de ce plan est $(-1,2,5)$ et le plan passe par le point $(-7,0,0)$.

Question 7. *Calculez et représentez sur le dessin ci-dessous les solutions de l'équation $X^8 = 1$. Donnez les solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$ ($a,b \in \mathbb{R}$). Explicitez la totalité du raisonnement suivi pour arriver aux solutions.*

Soit z une solution de $X^8 = 1$. Posons $z = |z| \cdot \operatorname{cis}\theta$ où $\theta = \operatorname{Arg} z$. Par définition de solution on a $z^8 = 1$ càd $(|z| \cdot \operatorname{cis}\theta)^8 = 1$ ou encore $|z|^8 \cdot \operatorname{cis}(8\theta \bmod 2\pi) = 1 \cdot \operatorname{cis} 0$. Il s'ensuit (par égalité de deux complexes écrits sous forme trigonométrique) que $|z|^8 = 1$ et $8\theta \bmod 2\pi = 0$. Puisque $|z| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, la première équation donne $|z| = 1$ et, du fait que $\theta \in [0, 2\pi[$ (et donc $8\theta \in [0, 16\pi[$), la deuxième équation a pour solutions $\theta = 0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \ldots, \frac{14\pi}{8}$ càd $\theta \in \left\{ k\frac{\pi}{4} \;\middle|\; k = 0,1,2,\ldots,7 \right\}$. Les solutions sous forme trigonométrique sont donc $\operatorname{cis}\frac{k\pi}{4}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,7\}$. Sous forme $a+b\boldsymbol{i}$, les solutions sont 1, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$, -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{i}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$.



Question 8. *Soit le système de deux équations à deux inconnues*

$$\begin{cases} x + \lambda y = 2\lambda \\ \lambda x + y = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda)$. Il s'annule en $\lambda = 1$ et en $\lambda = -1$.

Premier cas : $\lambda = 1$.
Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

et donc se réduit à l'équation $x + y = 2$ çàd $y = 2 - x$. L'ensemble des solutions est $\{(\alpha, 2-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement on a deux droites confondues.

Deuxième Cas : $\lambda = -1$.
Le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \quad \text{càd} \begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

et donc le système se réduit à l'équation $x - y = -2$. L'ensemble des solutions est $\{(-2+\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement on a deux droites confondues.

Troisième cas : $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.
Le sytème a une unique solution données par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1+\lambda^2 & 1 \end{vmatrix}}{1-\lambda^2} = \frac{2\lambda-\lambda-\lambda^3}{1-\lambda^2} = \frac{-\lambda^3+\lambda}{1-\lambda^2} = \frac{\lambda(-\lambda^2+1)}{1-\lambda^2} = \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ \lambda & 1+\lambda^2 \end{vmatrix}}{1-\lambda^2} = \frac{1+\lambda^2-2\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2} = 1.$$

L'ensembe des solutions est donc $\{(\lambda,1)\}$. Géométriquement on a deux droites qui se coupent en $(\lambda,1)$.

Question 9. *Soient les propositions P, Q, et R définies par*

- P : *l'argument du nombre complexe* $\sqrt{2}(\sin\pi + \boldsymbol{i}\cos\pi)$ *est* π.
- Q : *les droites d'équations* $x+y=1$ *et* $-42y = 42x-42$ *ont au moins un point d'intersection.*
- R : *l'implication* $P \Rightarrow Q$ *est vraie.*

La proposition $(P\vee Q)\wedge R$ *est-elle vraie ou fausse ? Expliquez votre démarche.*

On a $\sqrt{2}(\sin\pi + \boldsymbol{i}\cos\pi) = \sqrt{2}(0+\boldsymbol{i}(-1)) = -\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ dont la forme trigonométrique est $\sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$.
L'argument du nombre complexe est donc $\frac{3\pi}{2}$ et pas π. La proposition P est donc fausse.
L'équation $-42y = 42x-42$ s'écrit, après simplification par 42, $x+y=1$. Les deux équations étant identiques, les droites sont confondues et ont par conséquent au moins un point commun. La proposition Q est donc vraie.
Comme P est fausse et Q vraie, la tanle de vérité de l'implication nous dit que $P \Rightarrow Q$, çàd la proposition R, est vraie.
Nous avons donc

P	Q	R	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge R$
0	1	1	1	1

ce qui prouve que la proposition $(P\vee Q)\wedge R$ est vraie.