

Question 1. Calculez, si possible :

- $$\blacksquare -i \begin{pmatrix} i & 3-i \\ (1-i)^2 & i^{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & -i(3-i) \\ -i(1-2i+i^2) & -i^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3i+i^2 \\ -1(-2i) & -(i^4)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1-3i \\ -2 & i \end{pmatrix}$$
- $$\blacksquare \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-3)+2(-2)+5(-1) \\ -2(-3)+4(-2)+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4-5 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$
- $$\blacksquare \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-1) & -3(-2) & -3(-3) \\ -2(-1) & -2(-2) & -2(-3) \\ -1(-1) & -1(-2) & -1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
- $$\blacksquare \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \text{Impossible car le nombre de colonnes de la première matrice n'est pas égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.}$$

Question 2. Soient le point $p = (4, -2, 1)$, la droite $D \equiv -x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3}$ et le plan $\alpha \equiv x - z = 2$.
 Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point p , parallèle à la droite D et perpendiculaire au plan α . Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Une équation cartésienne de β est de la forme $ax + by + cz = d$ où (a, b, c) est un vecteur normal.
 Comme $p \in \beta$, on a, en remplaçant x par 4, y par -2 et z par 1 : $4a - 2b + c = d$ (1).
 Puisque $D \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$, $(-1, -2, 3)$ est un vecteur directeur de cette droite. Comme β est parallèle à D , les vecteurs $(-1, -2, 3)$ et (a, b, c) sont orthogonaux, c'est-à-dire $((-1, -2, 3) \mid (a, b, c)) = 0$, c'est-à-dire $-a - 2b + 3c = 0$ (2).
 Un vecteur normal de α est $(1, 0, -1)$. Comme α et β sont perpendiculaires, les vecteurs (a, b, c) et $(1, 0, -1)$ sont orthogonaux. On en déduit que $a - c = 0$, c'est-à-dire $a = c$.
 En remplaçant dans (2), on a $-a - 2b + 3a = 0$ c'est-à-dire $2a - 2b = 0$ c'est-à-dire $b = a$.
 En remplaçant dans (1), on a : $4a - 2a + a = d$ c'est-à-dire $d = 3a$. Prenons $a = 1$, nous obtenons $a = 1$, $b = 1$ et $d = 3$.
 Donc $\beta \equiv x + y + z = 3$.

Question 3. *Donnez la contraposée et la négation de la phrase suivante : « Si je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire ».*

On a une phrase du type $A \Rightarrow B$ où

A : je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires

B : je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire.

On a vu au cours que la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$ et la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$. On obtient donc

Contraposée : Si je rate l'examen de Mathématique Élémentaire alors je ne suis pas capable de résoudre tous les exercices supplémentaires.

Négation : Je suis capable de résoudre tous les exercices supplémentaires et [malgré tout] je rate l'examen de Mathématique Élémentaire.

Question 4. *Soit $1 + i$ une solution de l'équation $X^5 = -4 - 4i$ (vous ne devez pas le vérifier). Donner toutes les solutions complexes de l'équation $X^5 = -4 - 4i$ sous forme trigonométrique.*

Puisque $1 + i$ sous forme trigonométrique est égal à $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$, les solutions de $X^5 = 1$ sont $\text{cis} \left(k \frac{2\pi}{5} \right)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Par le cours, on sait que les solutions de $X^5 = -4 - 4i$ sont obtenues en multipliant $1 + i$ (une solution particulière) par les solutions de $X^5 = 1$. Il s'ensuit que les solutions de $X^5 = -4 - 4i$ sont $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4} \cdot \text{cis} k \frac{2\pi}{5}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. C'ad (sous forme trigonométrique) $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{13}{20}\pi$, $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{21}{20}\pi$, $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{29}{20}\pi$, $\sqrt{2} \cdot \text{cis} \frac{37}{20}\pi$.

Question 5. *Montrez que la proposition $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ est une tautologie.¹*

Première méthode : montrons que la table de vérité de la proposition (que nous noterons P) n'est constituée que de 1.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	P
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

¹La règle ci-dessus et $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ s'appellent règles de distributivité.

Deuxième méthode : Démontrons-le par calcul.

On a (vu la définition de \Rightarrow) que $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ a même table de vérité que $\neg(A \wedge (A \Rightarrow B)) \vee B$, ce qui par les lois de De Morgan est équivalent (c'est-à-dire a même table de vérité que) à $(\neg A \vee \neg(A \Rightarrow B)) \vee B$ c.à.d. $(\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B$, ou encore $(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B$. Par distributivité, on obtient $\underbrace{[(\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B)]}_{\text{tjs vrai}} \vee B$ c.à.d. $(\neg A \vee \neg B) \vee B$ c.à.d. $\neg A \vee \underbrace{\neg B \vee B}_{\text{tjs vrai}}$ qui est bien une tautologie.

Question 6. *Décrivez géométriquement les ensembles suivants. Détaillez les arguments qui vous permettent de décrire l'objet représenté par chaque ensemble.*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \text{ est orthogonal à } (3, -1)\}$

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\lambda - 1, 2 + 3\lambda, -8) \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}\}$

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution de l'équation } -x + 2y + 5z = 7\}$

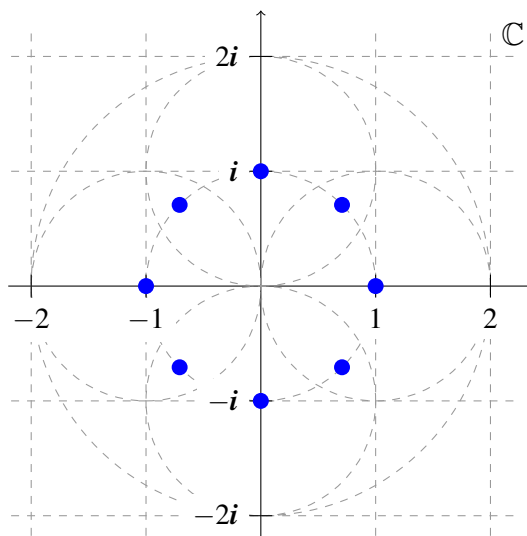
(a) L'ensemble A est constitué des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $((x, y) \mid (3, -1)) = 0$ c.à.d. $3x - y = 0$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 3x$. Cette droite passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 3)$.

(b) L'ensemble B est constitué des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y, z) = (-1, 2, -8) + \lambda(1, 3, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la droite dont une équation paramétrique est $(x, y, z) = (-1, 2, -8) + \lambda(1, 3, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette droite passe par le point $(-1, 2, -8)$ et admet $(1, 3, 0)$ comme vecteur directeur.

(c) L'équation $-x + 2y + 5z = 7$ est celle d'un plan. L'ensemble C est constitué des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui appartiennent au plan d'équation $-x + 2y + 5z = 7$. Un vecteur normal de ce plan est $(-1, 2, 5)$ et le plan passe par le point $(-7, 0, 0)$.

Question 7. Calculez et représentez sur le dessin ci-dessous les solutions de l'équation $X^8 = 1$. Donnez les solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Explicitez la totalité du raisonnement suivi pour arriver aux solutions.

Soit z une solution de $X^8 = 1$. Posons $z = |z| \cdot \text{cis } \theta$ où $\theta = \text{Arg } z$. Par définition de solution on a $z^8 = 1$ càd $(|z| \cdot \text{cis } \theta)^8 = 1$ ou encore $|z|^8 \cdot \text{cis}(8\theta \text{ mod } 2\pi) = 1 \cdot \text{cis} 0$. Il s'ensuit (par égalité de deux complexes écrits sous forme trigonométrique) que $|z|^8 = 1$ et $8\theta \text{ mod } 2\pi = 0$. Puisque $|z| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, la première équation donne $|z| = 1$ et, du fait que $\theta \in [0, 2\pi[$ (et donc $8\theta \in [0, 16\pi[$), la deuxième équation a pour solutions $\theta = 0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \dots, \frac{14\pi}{8}$ càd $\theta \in \left\{ k \frac{\pi}{4} \mid k = 0, 1, 2, \dots, 7 \right\}$. Les solutions sous forme trigonométrique sont donc $\text{cis } \frac{k\pi}{4}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Sous forme $a + bi$, les solutions sont $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.



Question 8. Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x + \lambda y = 2\lambda \\ \lambda x + y = 1 + \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$. Il s'annule en $\lambda = 1$ et en $\lambda = -1$.

Premier cas : $\lambda = 1$.

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

et donc se réduit à l'équation $x + y = 2$ càd $y = 2 - x$. L'ensemble des solutions est $\{(\alpha, 2 - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement on a deux droites confondues.

Deuxième Cas : $\lambda = -1$.

Le système s'écrit

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

et donc le système se réduit à l'équation $x - y = -2$. L'ensemble des solutions est $\{(-2 + \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement on a deux droites confondues.

Troisième cas : $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$.

Le système a une unique solution données par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 + \lambda^2 & 1 \end{vmatrix}}{1 - \lambda^2} = \frac{2\lambda - \lambda - \lambda^3}{1 - \lambda^2} = \frac{-\lambda^3 + \lambda}{1 - \lambda^2} = \frac{\lambda(-\lambda^2 + 1)}{1 - \lambda^2} = \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 + \lambda^2 \end{vmatrix}}{1 - \lambda^2} = \frac{1 + \lambda^2 - 2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = \frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2} = 1.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(\lambda, 1)\}$. Géométriquement on a deux droites qui se coupent en $(\lambda, 1)$.

Question 9. Soient les propositions P , Q , et R définies par

- P : l'argument du nombre complexe $\sqrt{2}(\sin \pi + i \cos \pi)$ est π .
- Q : les droites d'équations $x + y = 1$ et $-42y = 42x - 42$ ont au moins un point d'intersection.
- R : l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

La proposition $(P \vee Q) \wedge R$ est-elle vraie ou fausse ? Expliquez votre démarche.

On a $\sqrt{2}(\sin \pi + i \cos \pi) = \sqrt{2}(0 + i(-1)) = -\sqrt{2}i$ dont la forme trigonométrique est $\sqrt{2} \cdot \text{cis } \frac{3\pi}{2}$.

L'argument du nombre complexe est donc $\frac{3\pi}{2}$ et pas π . La proposition P est donc fausse.

L'équation $-42y = 42x - 42$ s'écrit, après simplification par 42, $x + y = 1$. Les deux équations étant identiques, les droites sont confondues et ont par conséquent au moins un point commun. La proposition Q est donc vraie.

Comme P est fausse et Q vraie, la table de vérité de l'implication nous dit que $P \Rightarrow Q$, çàd la proposition R , est vraie.

Nous avons donc

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$
0	1	1	1	1

ce qui prouve que la proposition $(P \vee Q) \wedge R$ est vraie.