Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ : /5

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ x + (\lambda - 2)y = \lambda - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a /4

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

Question 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On définit la trace de A, notée $\operatorname{tr} A$, par $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par /2

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 2^i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la trace de M. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit les ensembles suivants : /4

$$\begin{aligned} U_n &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est une solution de } z^n = 1 \right\} \\ A &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \text{ est solution de l'équation } z^n = \boldsymbol{i} \right\} \\ B &:= \left\{ u \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n} \;\middle|\; u \in U_n \right\} \end{aligned}$$

Montrez que $A = B$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Prouvez que, pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \wedge x \leqslant a$. /3

Question 6. Écrivez les deux ensembles suivants sous la forme d'une union d'intervalles disjoints. /3

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leqslant 3 \wedge (x \leqslant 1 \vee x \geqslant 7)\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x \leqslant 3 \wedge x \leqslant 1) \vee x \geqslant 7\right\}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Écrivez l'ensemble des solutions de l'inéquation $/5$

$$\frac{1+|x|}{|x+2|} \geqslant 1$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (12 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t \cdot A_1^t$. /3