Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 5 (12 octobre 2009)

Correction

Question 1. *Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel λ :*

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ x + (\lambda - 2)y = \lambda - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Appliquons des transformations élémentaires sur les lignes de cette matrice :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & \lambda - 1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 3 & \lambda - 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 - \lambda \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1 \end{array}$$

Appelons M cette dernière matrice.
Si $\lambda \neq 3$: alors on a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-2}{\lambda-3} \\ 0 & -1-\lambda & 2 - \lambda \end{array}\right)$$

- Si $\lambda \neq -1$, on peut diviser la troisième ligne par $-1-\lambda$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-2}{\lambda-3} \\ 0 & 1 & \frac{2-\lambda}{-1-\lambda} \end{array}\right)$$

Le système admet alors une solution ssi $\dfrac{\lambda-2}{\lambda-3} = \dfrac{2-\lambda}{-1-\lambda}$ ssi $-\lambda - \lambda^2 + 2 + 2\lambda = 2\lambda - \lambda^2 - 6 + 3\lambda$ ssi $4\lambda = 8$ ssi $\lambda = 2$. Donc si $\lambda = 2$, les lignes 2 et 3 donnent $y = 0$ et, en remplaçant dans l'équation $x + y = 1$ qui provient de la première ligne, on obtient $x = 1$. L'ensemble des solution est donc $\{(1,0)\}$.

Si $\lambda \neq 2$, le système est impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

- Si $\lambda = -1$, la matrice devient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La dernière ligne correspond à l'équation $0x + 0y = 3$. Le système est donc impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Si $\lambda = 3$: alors la matrice M s'écrit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

La deuxième ligne correspond à l'équation $0x + 0y = 1$. Le système est donc impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Question 2. *Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

Cas de base : $n = 0$. Dans ce cas, le premier membre devient $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} t^k = t^0 = 1$ et le second membre devient $\dfrac{1 - t^{0+1}}{1 - t} = \dfrac{1 - t}{1 - t} = 1$. L'égalité est donc prouvée.

Hypothèse de récurrence : supposons que l'égalité est prouvée pour tout $n \leqslant l$ avec $l \geqslant 0$ et montrons qu'elle est encore vérifiée pour $n = l + 1$. Nous devons montrer que $\sum_{k=0}^{l+1} t^k = (1 - t^{l+2})/(1 - t)$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l+1} t^k &= \left(\sum_{k=0}^{l} t^k\right) + t^{l+1} \\ &= \frac{1 - t^{l+1}}{1 - t} + t^{l+1} \\ &= \frac{1 - t^{l+1} + t^{l+1} - t^{l+1} \cdot t}{1 - t} \\ &= \frac{1 - t^{l+2}}{1 - t} \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On définit la trace de A, notée* $\operatorname{tr} A$, *par* $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 2^i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la trace de M. Expliquez votre démarche.

Par définition, $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 2^i$. Par la question question.1.2,

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 2^0 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2^{n+1} - 1 - 1 = 2^{n+1} - 2$$

Question 4. *Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} U_n &:= \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est une solution de } z^n = 1\} \\ A &:= \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ est solution de l'équation } z^n = \boldsymbol{i}\} \\ B &:= \left\{u \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n} \;\middle|\; u \in U_n\right\} \end{aligned}$$

Montrez que $A = B$.

Prouvons d'abord que $B \subseteq A$, c'est-à-dire que tout élément de B est un élément de A. Soit $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$, un élément quelconque de B. On a $(u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n = u^n \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ (règles sur les exposants et formule de De Moivre). Par hypothèse, $u \in U_n$, donc $u^n = 1$. On a donc montré que $(u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n = \boldsymbol{i}$ (car $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}$), c'est-à-dire que $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ est solution de l'équation $z^n = \boldsymbol{i}$ et donc, par définition de A, $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ est un élément de A.

Réciproquement, soit un élément quelconque de A, c'est-à-dire une solution z de $z^n = \boldsymbol{i}$; montrons que cet élément est un élément de B, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme $u \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ pour un certain $u \in U_n$. Comme $z = \left(z \cdot (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}\right) \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$, on pose $u := z \cdot (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}$. On a $u^n = \left(z (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^{-1}\right)^n = z^n \left((\operatorname{cis} \frac{\pi}{2n})^n\right)^{-1} = \boldsymbol{i}^{-1} \cdot \boldsymbol{i}$ (par hypothèse). Donc $u^n = 1$, c'est-à-dire qu'on a écrit z sous la forme $u \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n}$ avec u racine n^{e} de l'unité. Donc $z \in B$.

Question 5. *Prouvez que, pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \wedge x \leqslant a$.*

Distinguons deux cas. Tout d'abord considérons les $x \geqslant 0$.

- ($\Rightarrow$) Si $|x| \leqslant a$ alors on a forcément que $a \geqslant 0$ (puisque $|x| \geqslant 0$) et donc $-a \leqslant 0 \leqslant x$ et $x = |x| \leqslant a$.
- ($\Leftarrow$) Si $-a \leqslant x \wedge x \leqslant a$ alors $|x| = x \leqslant a$.

Montrons maintenant les deux implications pour $x < 0$.

- ($\Rightarrow$) Si $|x| \leqslant a$ alors $a \geqslant 0$ et donc $-x = |x| \leqslant a$, ce implique $x \geqslant -a$. De plus, $x \leqslant 0 \leqslant a$.
- ($\Leftarrow$) Si $-a \leqslant x \wedge x \leqslant a$ alors $|x| = -x \leqslant -(-a) = a$.

Question 6. *Écrivez les deux ensembles suivants sous la forme d'une union d'intervalles disjoints.*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3 \wedge (x \leqslant 1 \vee x \geqslant 7)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leqslant 3 \wedge x \leqslant 1) \vee x \geqslant 7\}$$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 1 \vee x \geqslant 7\} \\ &=]-\infty, 3] \cap (]-\infty, 1] \cup [7, +\infty[) \\ &=]-\infty, 1] \\ B &= \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 3 \wedge x \leqslant 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 7\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 7\} \\ &=]-\infty, 1] \cup [7, +\infty[\end{aligned}$$

Question 7. *Écrivez l'ensemble des solutions de l'inéquation*

$$\frac{1+|x|}{|x+2|} \geqslant 1 \tag{1}$$

sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

Condition d'existence : Pour que la fraction aie un sens, il faut que son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire que $|x+2| \neq 0$ i.e. $x+2 \neq 0$ i.e. $x \neq 0$.
Résolution : Comme $|x+2| \geqslant 0$ on peut multiplier les deux membres de (1) par cette quantité sans en changer le sens. On obtient alors

$$1+|x| \geqslant |x+2| \ .$$

Par la relation de la question question.1.5, ceci est équivalent à

$$-1-|x| \leqslant x+2 \quad \text{et} \quad x+2 \leqslant 1+|x|$$

ou encore

$$|x| \geqslant -x-3 \quad \text{et} \quad x+1 \leqslant |x|.$$

Par la relation $|x| \geqslant \Leftrightarrow x \leqslant -a \wedge x \geqslant a$, ceci devient

$$\big(\underbrace{x \leqslant x+3}_{\text{toujours vrai}} \text{ ou } x \geqslant -x-3\big) \text{ et } \big(x \leqslant -x-1 \text{ ou } \underbrace{x \geqslant x+1}_{\text{toujours faux}}\big) \ .$$

Comme le premier terme est toujours vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le « ou » de gauche l'est aussi et, par conséquent, le « et » se réduit au membre de droite (« vrai $\wedge P$ » est équivalent à « P »). Comme le dernier terme est faux quelque soit $x \in \mathbb{R}$, l'expression se réduit à $x \leqslant -x-1$ càd $x \leqslant -\frac{1}{2}$. En conclusion

$$(1) \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[.$$

Question 8. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t \cdot A_1^t. \tag{2}$$

Le cas de base, $n = 1$, affirme que $(A_1)^t = A_1^t$. C'est trivialement vérifié.
Étape de récurrence : Supposons que l'égalité (2) soit vérifiée pour tous les naturels $n \leqslant k$ (avec $k \geqslant 1$) ; prouvons que, sous cette hypothèse de récurrence, l'égalité (2) est vérifiée pour $n = k+1$, c'est-à-dire que

$$(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t = A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1})^t &= \big((A_1 A_2 \cdots A_k)\, A_{k+1}\big)^t && \text{associativité du produit matriciel}\\
&= A_{k+1}^t\, (A_1 A_2 \cdots A_k)^t && \text{car } (AB)^t = B^t A^t\\
&= A_{k+1}^t\, (A_k^t \cdots A_2^t A_1^t) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= A_{k+1}^t A_k^t \cdots A_2^t A_1^t && \text{associativité du produit matriciel}
\end{aligned}$$