Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par /4

$$A_{ij} = \begin{cases} \pi^j & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\operatorname{dét} A = \pi^{n(n+1)/2}$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? /3

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 - y = x$;

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

Justifiez vos affirmations.

Question 3. Soient les ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$. Justifiez qu'on a $A \subseteq B$ mais pas $B \subseteq A$. /2

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3})$. /5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1}. Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. /5

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = -14 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Calculez les déterminants suivants : /3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} =$$

Question 7. Calculez les sommes suivantes : /3

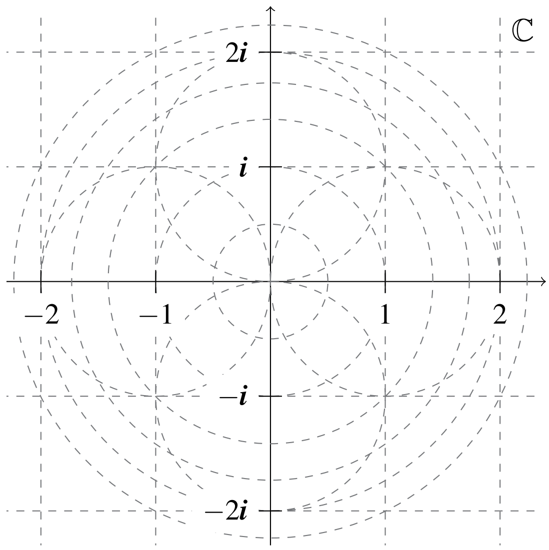
- $\displaystyle\sum_{i=-3}^{k} k^2 + t^2 + 2 =$
- $\displaystyle\sum_{i=-1}^{k} \sum_{j=0}^{k} i^2 - j^2 =$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=i}^{\ell} i + j =$

Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Calculez et représentez graphiquement les solutions de l'équation $X^6 = 8$. /4



Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (19 octobre 2009)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9.

/4

(a) Prouvez que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{1}$$

(b) Donnez une explication géométrique de (1) en traçant un carré de côté $\sum_{i=0}^{n} i$, par exemple.