

Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(19 octobre 2009)

Correction

Question 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} \pi^j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, on a $\det A = \pi^{n(n+1)/2}$.

Cas de base : $n = 2$. Dans ce cas, $A = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$. Donc $\det A = \pi^3$ et $\pi^{2(2+1)/2} = \pi^3$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 2$.

Hypothèse de récurrence : supposons que l'égalité soit vérifiée $\forall n \leq k$ avec $k \geq 2$. En particulier, si $n = k$, on a

$$\det \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ 0 & \pi^2 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ 0 & 0 & \pi^3 & \dots & \pi^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pi^k \end{pmatrix} = \pi^{k(k+1)/2}.$$

Montrons l'égalité pour $n = k + 1$: en développant selon la dernière ligne, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} \pi & \dots & \pi^k & \pi^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pi^{k+1} \end{pmatrix} = \pi^{k+1} \cdot (-1)^{k+1+k+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \dots & \pi^k \\ 0 & \pi^2 & \dots & \pi^k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \pi^k \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que le membre de droite est égal à

$$\begin{aligned} \pi^{k+1} \cdot (-1)^{2k+2} \cdot \pi^{k(k+1)/2} &= \pi^{k+1 + \frac{k(k+1)}{2}} && \text{(car } 2k+2 \text{ est un nombre pair)} \\ &= \pi^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}. \end{aligned}$$

Question 2. Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 - y = x$;

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ tel que $y^3 = x$.

Justifiez vos affirmations.

(a) f ne définit pas une fonction. En effet, pour (par exemple) $x = 0$, il y a plusieurs y qui lui correspondent, à savoir (au moins) $y = 0$ et $y = 1$ car ces deux valeurs sont des solutions de l'équation $y^3 - y = 0$.

(b) g définit une fonction. En effet, pour un $x \in \mathbb{R}$ donné, il n'existe qu'une seule solution $y^3 = x$ (qui est la propriété que les y doivent satisfaire pour correspondre à x), à savoir $y = \sqrt[3]{x}$.

Question 3. Soient les ensembles $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$. Justifiez qu'on a $A \subseteq B$ mais pas $B \subseteq A$.

- $A \subseteq B$. Prenons un (x,y) arbitraire dans A et montrons que $(x,y) \in B$. Par définition, $(x,y) \in A$ signifie que $x = y$. Dès lors, en élevant les deux membres au carré, on obtient $x^2 = y^2$ (règle de calcul vue au cours). Donc (x,y) satisfait la propriété d'appartenance à B .
- $B \not\subseteq A$. Il suffit pour cela d'exhiber un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Prenons $(x,y) = (1, -1)$. Comme $x^2 = 1^2 = (-1)^2 = y^2$, le couple $(1, -1) \in B$. De plus $(x,y) \notin A$ car il ne vérifie pas la propriété $x = y$.

Question 4. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2 .

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{cis} \frac{2\pi}{3},$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{cis} \frac{4\pi}{3}.$$

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1} . Expliquez votre démarche.

$$M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 + z_1 + z_2 & 1 + z_1 + z_2 \\ 1 + z_1 + z_2 & 1 + z_1^2 + z_2^2 & 1 + z_1 z_2 + z_1 z_2 \\ 1 + z_1 + z_2 & 1 + z_1 z_2 + z_1 z_2 & 1 + z_1^2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Or,

$$1 + z_1 + z_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

$$1 + 2z_1 z_2 = 1 + 2 \text{cis} \frac{2\pi}{3} \text{cis} \frac{4\pi}{3} = 1 + 2 \text{cis} 0 = 3 \quad (\text{car } \text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \text{ mod } 2\pi),$$

$$1 + z_1^2 + z_2^2 = 1 + \text{cis} \frac{4\pi}{3} + \text{cis} \frac{2\pi}{3} = 0 \quad (\text{car } \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z) \text{ mod } 2\pi).$$

Donc

$$M \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir l'identité à partir de $M \cdot M$, il suffit de multiplier chacune des lignes par $\frac{1}{3}$ et d'ensuite permuter les lignes 2 et 3. Or, effectuer une transformation élémentaire sur les

lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par l'identité dans laquelle on a appliqué la même transformation. Dès lors on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=M^{-1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{z_2}{3} & \frac{z_1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{z_1}{3} & \frac{z_2}{3} \end{pmatrix}.$$

Question 5.

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = -14 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

(a)

$$\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-7} \\ \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{12}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = A^{-1} \end{array}$$

(b) Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par A^{-1} de chaque côté, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(6, -16, 1)\}$.

Question 6. Calculez les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot (-48) = 384$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$= abc$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments situés sur la diagonale principale.

Question 7. Calculez les sommes suivantes :

■ $\sum_{i=-3}^k k^2 + i^2 + 2 = (k^2 + i^2 + 2) \sum_{i=-3}^k 1 = (k^2 + i^2 + 2)(k + 4)$

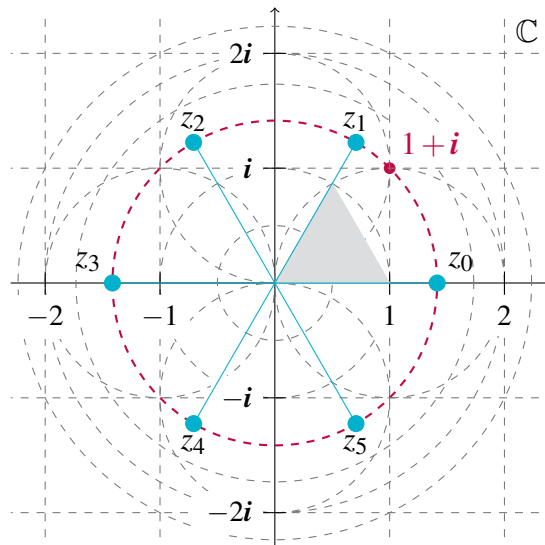
■ $\sum_{i=-1}^k \sum_{j=0}^k i^2 - j^2 = \underbrace{\sum_{j=0}^k (-1)^2 - j^2}_{\text{terme en } i=-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k i^2 - j^2}_{=0(\text{antisymétrie})} = \sum_{j=0}^k 1 - \sum_{j=0}^k j^2 = (k + 1) - \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$

■ $\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=i}^{\ell} i + j = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{\ell} (i + j) - \sum_{j=1}^{i-1} (i + j) \right) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(li + \frac{\ell(\ell + 1)}{2} - (i - 1)i - \frac{(i - 1)i}{2} \right)$
 $= - \sum_{i=1}^{\ell} \left(li + \frac{\ell(\ell + 1)}{2} - \frac{3}{2}(i - 1)i \right) = \ell \sum_{i=1}^{\ell} i + \frac{\ell^2(\ell + 1)}{2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\ell} (i^2 - i)$
 $= \ell^2(\ell + 1) - \frac{3}{2} \left(\frac{\ell(\ell + 1)(2\ell + 1)}{6} - \frac{\ell(\ell + 1)}{2} \right)$
 $= \ell^2(\ell + 1) - \frac{\ell(\ell + 1)(2\ell + 1)}{4} + \frac{3}{4}\ell(\ell + 1) = \frac{1}{2}\ell(\ell + 1)(\ell - 1)$

Question 8. Calculez et représentez graphiquement les solutions de l'équation $X^6 = 8$.

Remarquons tout d'abord que $\sqrt{2}$ est une solution particulière de cette équation. On sait donc que les solutions de $X^6 = 8$ sont données par $\sqrt{2}z$ où z est une solution de $X^6 = 1$. Soit z une telle solution, en posant $z = |z| \operatorname{cis} \theta$ (où θ est l'argument de z) nous obtenons $|z|^6 \operatorname{cis} 6\theta = 1$. Par égalité de deux complexes sous forme trigonométrique, on peut déduire que $|z|^6 = 1$ et $6\theta \bmod 2\pi = 0$. Puisque $|z| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, nous obtenons $|z| = 1$ et $\theta \in \{k\frac{\pi}{3} | k = 0, 1, \dots, 5\}$. Les solutions, sous forme trigonométrique, sont donc $z_k := \sqrt{2} \operatorname{cis}(k\frac{\pi}{3})$ où $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

Géométriquement, ces solutions sont sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$ (c'est le cercle passant par $1+i$). L'angle de $\pi/3$ est celui d'un triangle équilatéral ; par exemple, le sommet de celui de base $(0,0)-(1,0)$ se trouve à l'intersection des deux cercles de rayon 1 centrés en ces points.



Question 9.

(a) Prouvez que

$$\left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \sum_{i=1}^n i^3 \tag{1}$$

(b) Donnez une explication géométrique de (??) en traçant un carré de côté $\sum_{i=0}^n i$, par exemple.

(a) Prouvons l'égalité (??) par récurrence sur n . Pour le cas de base ($n = 1$) cette égalité devient $1^2 = 1^3$ qui est toujours vrai. Supposons maintenant que (??) est vérifiée pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et prouvons cette égalité pour $k = n + 1$. Le deuxième membre de l'égalité vaut alors

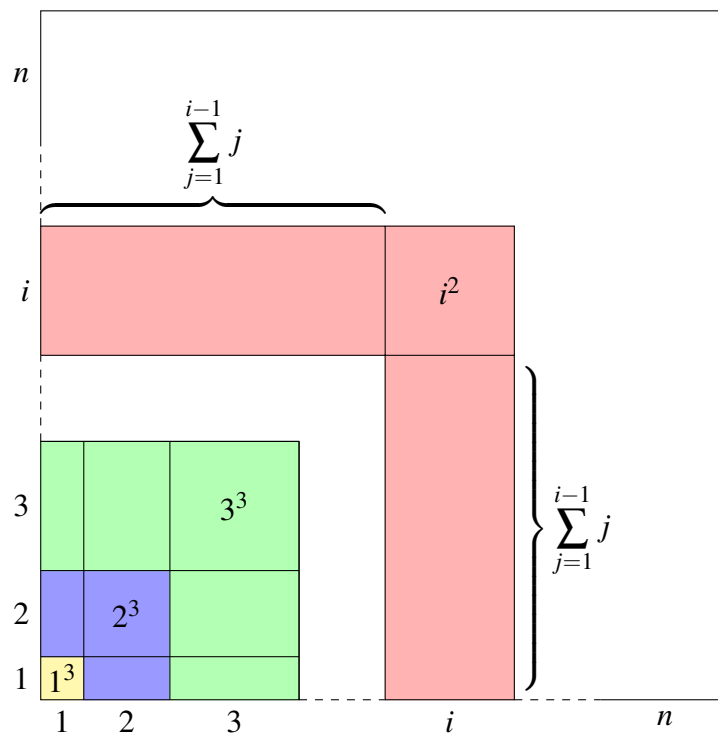
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^n i^3\right) + (n+1)^3 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 + (n+1)^3 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n+1} i \right)^2$$

L'égalité (??) est donc bien vérifiée quelque soit $n \geq 1$.

(b) La propriété apparaît au travers des coloriages de la figure ci-dessous :



La justification du fait que la bande rose est d'aire i^3 se fait à l'aide du calcul suivant :

$$i^2 + 2i \sum_{j=1}^{i-1} j = i^2 + 2i \frac{(i-1)i}{2} = i^2(1 + i - 1) = i^3.$$