

Mathématique Élémentaire

Examen

(30 octobre 2010)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■ $\sum_{t=-k}^k t^2 =$

■ $\sum_{t=-k}^k t =$

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

/4

- (a) Calculez $M^T M$ où M^T désigne la transposée de M .
- (b) Du point précédent, déduisez M^{-1} . Expliquez votre démarche.

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 3.

/4

(a) Calculez

■ $|2 + 3i|^4 =$

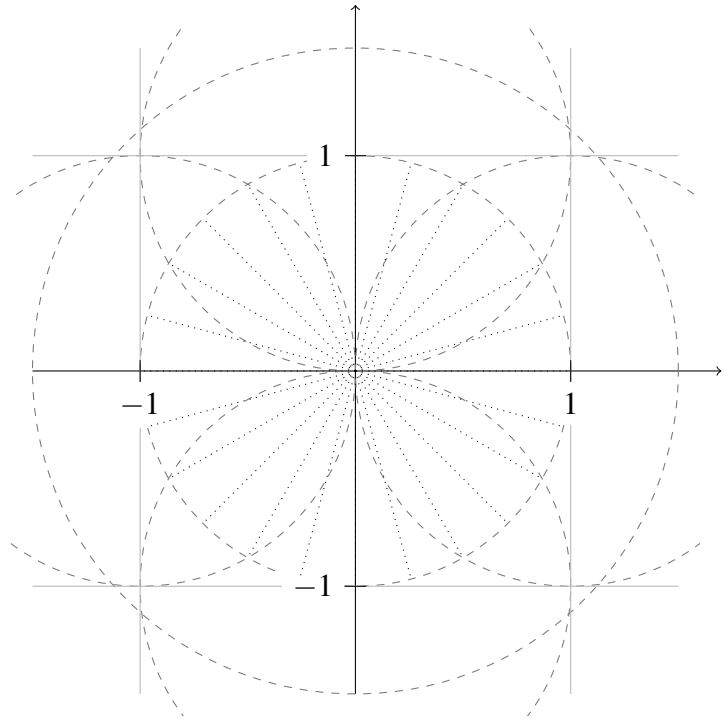
■ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

(b) Donnez la forme trigonométrique de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. Donnez les solutions sous forme trigonométrique de $X^6 = -i$. Représentez les solutions dans le plan complexe.

/6



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5.

/4

(a) Établissez la table de vérité de $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$.

(b) Prouvez que la proposition ci-dessus est équivalente à $P \Leftrightarrow Q$.

Question 6. Calculez $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 - j^2) + 2j$.

/3

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2010)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1, 0, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x + 2y + 2z = -1$ et $3x - 2y + 3z = 7$.

/4

Question 8. Soit le système

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ 2\lambda x + \lambda y + 2z = 2\lambda^2 \\ \lambda x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.
- (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -1$.
- (c) Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système pour $\lambda = -1$.
- (d) Résolvez le système dans le cas où $\lambda = 2$.

/ 10

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 8 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9.

/5

- (a) Prouvez par récurrence sur n que $2(n + 1) \leq n^2$ dès que $n \geq 3$.
- (b) Avez-vous une idée pour une preuve différente ?

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 10. La relation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : (x_1, x_2) \mapsto A$ tel que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse.

/2

Question 11. Calculez les intégrales suivantes :

/4

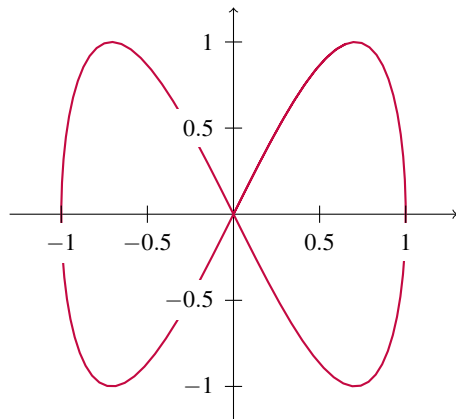
(a) $\int_0^1 \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 12. Calculez une équation cartésienne de la tangente à la courbe décrite par $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: \theta \mapsto (\sin \theta, \sin(2\theta))$ au point $\gamma(0)$. Tracez cette tangente sur le graphe ci-dessous et expliquez son interprétation géométrique.

/4



Question 13. Soit $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2^{x+x^2} - \alpha \sin x$. Pour quelle(s) valeur(s) de α la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = \pi$ est-elle horizontale ?

/4