Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2010) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $\displaystyle\sum_{t=-k}^{k} t^2 = \sum_{t=-k}^{-1} t^2 + \sum_{t=0}^{k} t^2 = 2\sum_{t=0}^{k} t^2$ (car t^2 est une fonction paire et $0^2 = 0$).

  Donc $\displaystyle\sum_{t=-k}^{k} t^2 = 2 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{3}$.

- $\displaystyle\sum_{t=-k}^{k} t = \sum_{t=-k}^{-1} t + \sum_{t=0}^{0} t + \sum_{t=1}^{k} t = -\sum_{t=1}^{k} t + \sum_{t=1}^{k} t = 0$

Question 2. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \textit{où } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(a) *Calculez $M^T M$ où M^T désigne la transposée de M.*

(b) *Du point précédent, déduisez M^{-1}. Expliquez votre démarche.*

(a) On a

$$\begin{aligned} M^t M &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) De (a), on obtient $M^T M = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\cdot \mathrm{Id}$. Comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \neq 0$ (en effet $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, donc $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2,\delta^2 \in \mathbb{R}^{>0}$) on a, en divisant les deux membres par $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, que

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} M^T M = \mathrm{Id}\,.$$

On en déduit que $M^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} M^t$.

Question 3.

(a) Calculez

- $|2+3\boldsymbol{i}|^4 = \left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^4 = \left(2^2+3^2\right)^2 = 169$
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{i}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(b) Donnez la forme trigonométrique de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a $\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ et $\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$. Donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \overline{\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ car $z^{-1} = \bar{z}$ ssi $|z| = 1$.

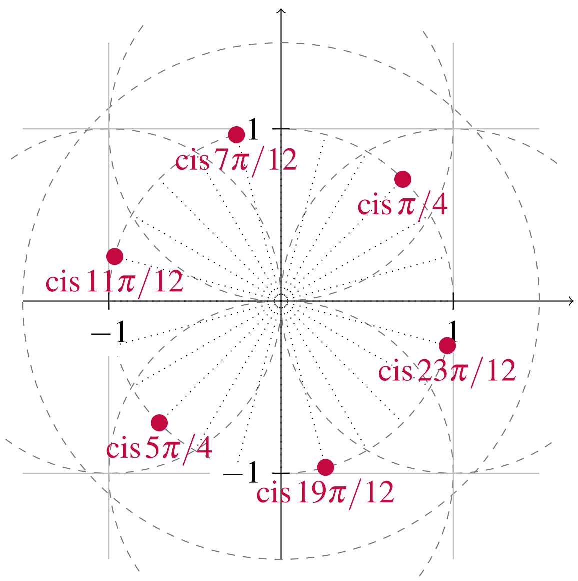
Finalement le produit demandé est

$$\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{cis}\Big(\big(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\big) \bmod 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\Big(\frac{(21+4)\pi}{12} \bmod 2\pi\Big) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{12}.$$

Question 4. *Donnez les solutions sous forme trigonométrique de $X^6 = -\boldsymbol{i}$. Représentez les solutions dans le plan complexe.*

Puisque $-\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$, une solution particulière de l'équation est $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{12} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les complexes $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot u$ avec $u^6 = 1$, c'est-à-dire $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\pi$, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$ et $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$; ou encore $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$ et $\operatorname{cis}\frac{23\pi}{12}$.

REMARQUE : Sous forme algébrique, ces solutions s'écrivent (en utilisant le point (b) de la question 3) : $\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



Question 5.

(a) *Établissez la table de vérité de* $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$.

(b) *Prouvez que la proposition ci-dessus est équivalente à* $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Ceci est clairement la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ et donc, vu que les deux propositions ont la même table, elles sont équivalentes.

Question 6. *Calculez* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i^2 - j^2) + 2j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i^2 - j^2) + 2j &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i^2 - j^2) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2j \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2j \qquad (\text{car } A_{ij} = i^2 - j^2 \text{ est une matrice carrée antisymétrique}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n^2(n+1) \qquad (\text{car } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est constant par rapport à } i)
\end{aligned}$$

Question 7. *Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(-1,0,2)$ et perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $4x+2y+2z=-1$ et $3x-2y+3z=7$.*

Une équation cartésienne de α est de la forme $ax+by+cz=d$ où $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. On sait que (a,b,c) est un vecteur normal de α.

Comme le plan α est perpendiculaire à la droite D d'intersection des deux plans donnés, (a,b,c) est aussi un vecteur directeur de la droite D.

Un vecteur normal du plan d'équation $4x+2y+2z=-1$ (resp. d'équation $3x-2y+3z=7$) est $(4,2,2)$ (resp. $(3,-2,3)$). La droite D étant contenue dans chacun des deux plans, le vecteur (a,b,c) sera orthogonal aux vecteurs $(4,2,2)$ et $(3,-2,3)$. On a donc

$$\begin{cases} 4a+2b+2c=0, & (1)\\ 3a-2b+3c=0. & (2)\end{cases}$$

En faisant $(1)+(2)$, on obtient $7a+5c=0$, c'est-à-dire $a=-5c/7$. En remplaçant dans (2), on a $2b=3a+3c=-\frac{15c}{7}+3c$, c'est-à-dire $b=3c/7$. En prenant $c=7$, on a que $(-5,3,7)$ est un vecteur directeur de D et donc un vecteur normal de α.

Donc $\alpha\equiv -5x+3y+7z=d$ pour un certain $d\in\mathbb{R}$. Comme $(-1,0,2)\in\alpha$, on a, en remplaçant x par -1, y par 0 et z par 2, que $5+0+14=d$, c'est-à-dire $d=19$.

Donc $\alpha\equiv -5x+3y+7z=19$.

Question 8. *Soit le système*

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=\lambda^2\\ 2\lambda x+\lambda y+2z=2\lambda^2\\ \lambda x+y+\lambda z=1\end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda\in\mathbb{R}$ le système possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.*

(b) *Soit $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda=-1$.*

(c) *Déduisez du point précédent l'ensemble des solutions du système pour $\lambda=-1$.*

(d) *Résolvez le système dans le cas où $\lambda=2$.*

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2\lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système. Le système a une solution unique ssi dét$A \neq 0$. On a, en développant par rapport à la première ligne,

$$\begin{aligned} \text{dét}A &= \lambda(\lambda^2-2) - 1(2\lambda^2 - 2\lambda) + (2\lambda - \lambda^2) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2). \end{aligned}$$

Donc dét$A \neq 0$ ssi $\lambda \neq 0$ et $\lambda^2 - 3\lambda + 2 \neq 0$; c'est-à-dire ssi $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 1$.

(b) On a vu au cours que A^{-1} existe ssi dét$A \neq 0$. Pour $\lambda = -1$, A^{-1} existe car -1 n'est pas une valeur de λ qui annule détA. Calculons A^{-1} par la méthode de la matrice compagnon.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow -L_1 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-3},\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Pour $\lambda = -1$ le système sécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En multipliant des deux cotés à gauche par A^{-1}, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-1,0,0)\}$.

(d) Pour $\lambda = 2$, le système s'écrit
$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$$
Échelonnons la matrice augmentée du système : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

En appliquant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, nous obtenons la matrice augmentée
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$
La troisième ligne nous dit que $z = -3$. La première ligne nous dit que $2x+y+z=4$. Donc $y = 7-2x$. L'ensemble des solutions est donc $\{(x, 7-2x, -3) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Question 9.

(a) *Prouvez par récurrence sur n que* $2(n+1) \leqslant n^2$ *dès que* $n \geqslant 3$.

(b) *Avez-vous une idée pour une preuve différente ?*

(a) Cas initial $n = 3$: le premier membre est $2(3+1) = 8$ et le second membre est $3^2 = 9$, l'inégalité est donc vérifiée.

Étape de récurrence : supposons que l'inégalité est vérifiée pour $3 \leqslant n \leqslant K$ et prouvons que l'inégalité est toujours vérifiée pour $n = K+1$, c'est-à-dire $2(K+2) \leqslant (K+1)^2$. Or, $(K+1)^2 = K^2+2K+1$ et, par hypothèse de récurrence, $K^2 \geqslant 2(K+1)$. Donc $K^2+2K+1 \geqslant 2(K+1)+2K+1 = 4K+3$. De plus $4K+3 \geqslant 2K+4 = 2(K+2)$ car $K \geqslant 3$. Il s'ensuit que $(K+1)^2 \geqslant 2(K+1)$.

(b) Une des preuves possibles est la suivante. L'inégalité à prouver est équivalente à $n^2 - 2(n+1) \geqslant 0$. En réalisant une étude de signe de la fonction $f(x) = x^2 - 2(x+1)$, nous constatons que cette fonction est positive dès que $x \geqslant 1+\sqrt{3}$. Puisque 3 est supérieur à $1+\sqrt{3}$, $f(n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel $n \geqslant 3$. L'inégalité est donc vérifiée pour tout $n \geqslant 3$.

Une autre preuve possible est de réécrire l'inégalité comme $n^2 - 2n \geqslant 2$. On a $n^2 - 2n = n(n-2)$. Puisque $n \geqslant 3$, $n-2 \geqslant 1$ et donc $n(n-2) \geqslant n$, ce qui implique $n(n-2) \geqslant 2$.

Question 10. *La relation* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2} : (x_1, x_2) \mapsto A$ *tel que* $A\binom{1}{0} = \binom{x_1}{x_2}$ *définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse.*

Ce n'est pas une fonction. En effet, pour (par exemple) $(x_1, x_2) = (0,0)$, il y a plusieurs solutions A à l'équation $A\binom{1}{0} = \binom{0}{0}$ qui sont $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont quelconques. Il correspond donc plusieurs valeurs de A à $(0,0)$, ce qui contredit la définition de fonction.

Question 11. *Calculez les intégrales suivantes :*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$

(a) Comme $\partial_x(1+\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ l'intégrant est de la forme $\partial f \cdot f$ (à une constante multiplicative près). Donc

$$\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \partial_x\Big(\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{14}{3}.$$

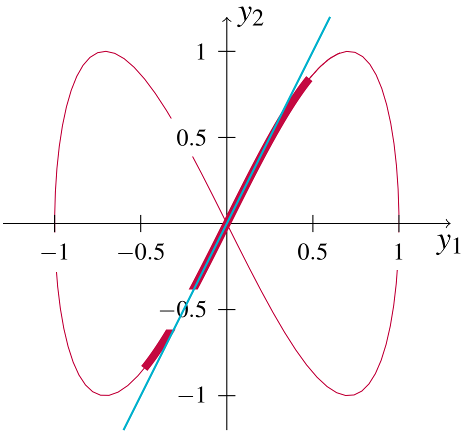
(b) On va « éliminer » le facteur x^2 gênant en utilisant deux intégrations par partie.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \Big[2x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \pi - \Big[2(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

Question 12. *Calculez une équation cartésienne de la tangente à la courbe décrite par* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto \big(\sin\theta, \sin(2\theta)\big)$ *au point* $\gamma(0)$. *Tracez cette tangente sur le graphe ci-dessous et expliquez son interprétation géométrique.*

Une équation paramétrique de la tangente à l'image de γ en 0 est donnée par $(y_1, y_2) = \gamma(0) + \lambda\partial\gamma(0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici, $\gamma(0) = (0,0)$ et $\partial\gamma(0) = \big(\cos 0, 2\cos(2\cdot 0)\big) = (1,2)$. L'équation devient donc $(y_1, y_2) = \lambda(1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En éliminant λ, on obtient l'équation cartésienne $y_2 = 2y_1$. La courbe décrite par γ passe deux fois par $(0,0)$ mais, lorsque θ est proche de 0, c'est la partie en gras qui est parcourue et c'est pourquoi c'est la tangente à cette partie de l'image que nous obtenons.



Question 13. *Soit* $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^{x+x^2} - \alpha\sin x$. *Pour quelle(s) valeur(s) de* α *la tangente au graphe de* f *au point d'abscisse* $x = \pi$ *est-elle horizontale ?*

Rappelons que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = \pi$ est horizontale si et seulement si sa pente est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $\partial f_\alpha(\pi) = 0$. Or $\partial f_\alpha(x) = (1+2x)(\ln 2)2^{x+x^2} - \alpha\cos x$. Donc $\partial f_\alpha(\pi) = 0$ ssi $-(1+2\pi)(\ln 2)2^{\pi+\pi^2} = \alpha$.