Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez la table de vérité de $(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ et donnez en une forme équivalente plus simple. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez les intégrales suivantes : /4

- $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

Question 3. La relation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^2 = z$ et $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse. /3

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. /5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = 1 \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = 1 \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

/4

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de f en $f(t)$ est perpendiculaire à $f(t)$.

(b) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s) = s^2 + s$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $g := f \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

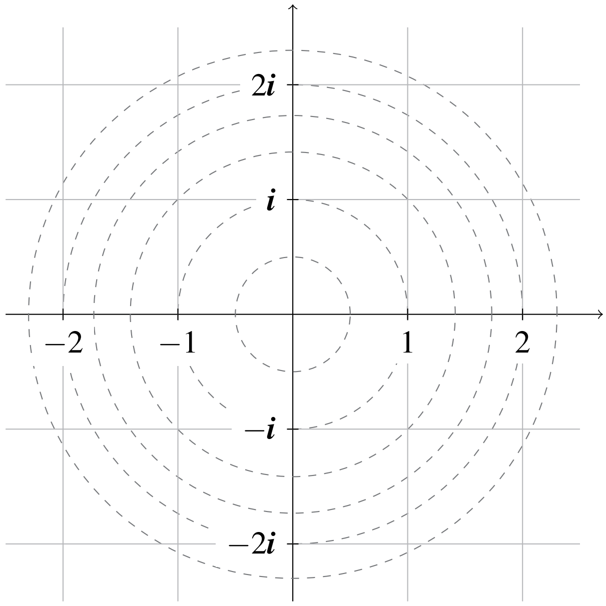
$$\big(\partial_s^2 g(s) \bigm| g(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique de $X^8 = 81$. Représentez les solutions dans le plan complexe. /6



Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Calculez les dérivées suivantes : /4

- $\partial_x\big(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2}+(\operatorname{tg}x)\arcsin y\big) =$

- $\partial_y\big(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2}+(\operatorname{tg}x)\arcsin y\big) =$

Question 8. Calculez /4

- $\sum_{v=-1}^{t}(v+1)^2$

- $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(n+i-j)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par $(1,-3,5)$ et dont un vecteur directeur est simultanément orthogonal aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.

/8

(a) Calculez le déterminant de A.

(b) Soit le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ (en distinguant plusieurs cas si nécessaire). Expliquez la méthode que vous utilisez et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Calculez

/2

- $(4-\boldsymbol{i})^{-1}$
- $\dfrac{2-3\boldsymbol{i}}{4-3\boldsymbol{i}}$
- $\overline{-12\boldsymbol{i}+40}$
- $\left|(2-\boldsymbol{i})^2\cdot(3+\boldsymbol{i})^4\right|$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12.

/6

(a) Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(b) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$