Mathématique Élémentaire

Examen (8 juin 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $/4$

- $\overline{-3\boldsymbol{i}-2} =$
- la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{3-2\boldsymbol{i}}{4\boldsymbol{i}-1}$:
- $|\boldsymbol{i}-2| =$
- $\left|(\boldsymbol{i}-2)^4 \cdot \boldsymbol{i}\right|^2 =$

Mathématique Élémentaire

Examen (8 juin 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. /7

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Calculez $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$. Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

/3

(a) La proposition $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \Rightarrow R$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation et la contraposée de la phrase suivante : « Si j'assiste à tous les cours pendant l'année, alors je réussis les examens ».

Question 4. Calculez

/4

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

- $\displaystyle\int_1^3 x^2 \ln x\,dx =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit le système /7

$$\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda y+\lambda z=\lambda \\ x+\lambda y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -4$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $\lambda = -4$.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Calculez /3

- $\displaystyle\sum_{s=-4}^{v} s(s+2)$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=2}^{\ell}(j^2-i^2+1)$

Question 7. La relation $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z\mapsto w$ tel que $w^2=z$ et $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse. /3

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 8. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à la droite d'intersection des plans d'équations $2x+4y-2z=-1$ et $6x-3y+3z=5$, et passant par $(2,4,-1)$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

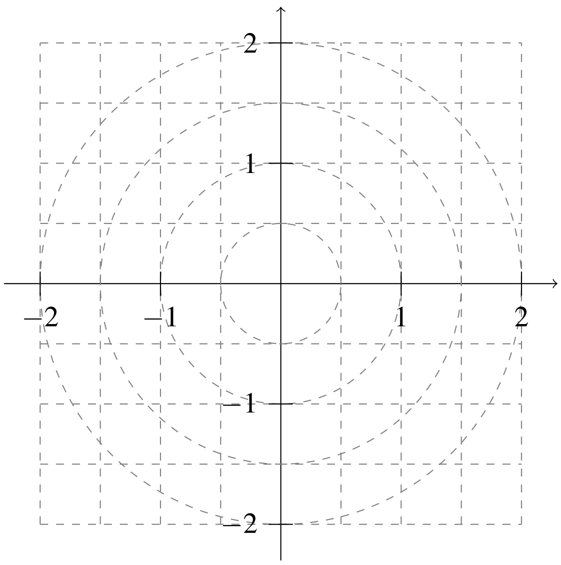
Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes : /6

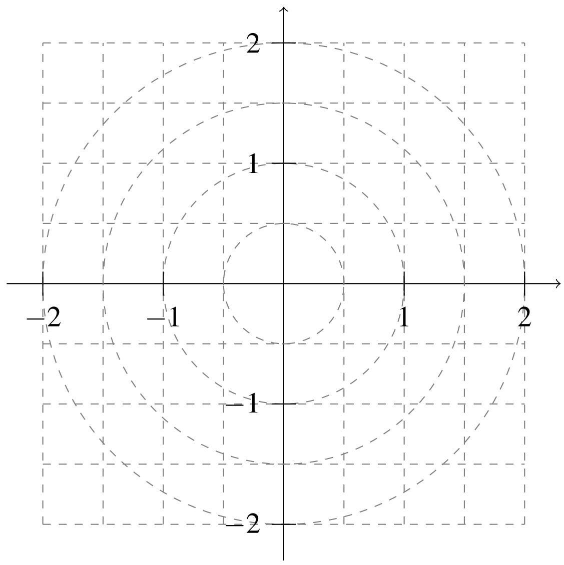
(a) $X^4 + 1 = 0$

(b) $X^6 + X^2 = 0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^4 + 1 = 0$.



Solutions de $X^6 + X^2 = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

/5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = 1 \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = 1 \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. On considère la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

/4

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de γ en $\gamma(t)$ est perpendiculaire à $\gamma(t)$.

(b) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $f := \gamma \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 f(s) \bigm| f(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2.$$