Mathématique Élémentaire

Examen

(19 août 2011)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. La relation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^2 = z$ et $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ définit-elle une fonction ? Justifiez votre réponse. $/4$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez

/3

- $\sum_{v=-3}^{j} v(v+2) =$

- $\sum_{k=0}^{t}\sum_{\ell=2}^{t}(k^2-\ell^2+1) =$

Question 3. Calculez

/2

- $|-1-2\boldsymbol{i}| =$
- $\dfrac{5-2\boldsymbol{i}}{3-4\boldsymbol{i}} =$
- $|\boldsymbol{i}-3| =$
- $\overline{-7\boldsymbol{i}+5} =$
- $\left|(1+2\boldsymbol{i})^7(\boldsymbol{i}-3)^4\right|^2 =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. On considère la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$. /4

(a) Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la tangente à l'image de γ en $\gamma(t)$ est perpendiculaire à $\gamma(t)$.

(b) Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto \sigma(s)$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$. Posons $f := \gamma \circ \sigma$. Montrez que, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\partial_s^2 f(s) \bigm| f(s)\big) = -\big(\partial_s \sigma(s)\big)^2.$$

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 5. Soit le système

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$. On suppose que $ab' - a'b \neq 0$.

(a) Montrez que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

Expliquez votre démarche.

(b) Montrez que le système (1) possède une et une seule solution qui s'écrit

$$\left(\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \right)$$

Argumentez clairement et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6.

/3

(a) La proposition $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \Rightarrow C$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation de la phrase suivante : « Si je rate l'examen de Mathématique élémentaire, alors j'aurai aussi raté l'examen d'Analyse ».

Question 7. Calculez

/4

- $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_0^{\ln \pi} \sin(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x =$

Mathématique Élémentaire

Examen (19 août 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. /6

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}$.

(b) Montrez que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 9. Soit le plan α d'équation $\alpha \equiv 2x - 3y - z = -6$ et le point p de coordonnées $(0, 1, -8)$.

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point p et perpendiculaire au plan α.

(b) Recherchez, s'il existe, le point d'intersection entre la droite D et le plan α.

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10.

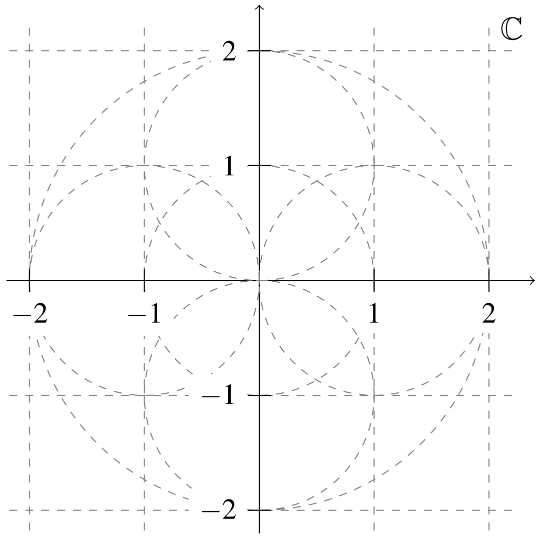
/10

(a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prouvez une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 3. Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre).

(c) Montrez que $2 - \boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $Z^3 = 2 - 11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez toutes les solutions complexes, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, de l'équation $Z^3 = 2 - 11\boldsymbol{i}$.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Calculez les déterminants suivants (simplifiez le résultat obtenu) : /3

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 12. Soit le système

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Poursuivez, si nécessaire, votre réponse sur cette page.