Mathématiques Élémentaires

Test n° 2 (20 septembre 2010) Correction

Question 1. *Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrez que*

(a) $(\alpha u|v) = \alpha(u|v)$,

(b) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

Énoncez les propriétés que vous utilisez.

(a) Par hypothèse, u et v sont respectivement de la forme $(u_1, \dots, u_N)$ et $(v_1, \dots, v_N)$. On a vu aussi que $\alpha u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_N)$ par la multiplication d'un vecteur par un réel. On a donc

$$\begin{aligned}
(\alpha u|v) &= \big((\alpha u_1, \dots, \alpha u_N) \,\big|\, (v_1, \dots, v_N)\big) \\
&= (\alpha u_1)v_1 + \cdots + (\alpha u_N)v_N && \text{(déf. du produit scalaire)} \\
&= \alpha(u_1 v_1) + \cdots + \alpha(u_N v_N) && \text{(associativité de la multiplication dans } \mathbb{R}) \\
&= \alpha(u_1 v_1 + \cdots + u_N v_N) && \text{(mise en évidence de } \alpha) \\
&= \alpha(u|v).
\end{aligned}$$

(b) En reprenant les remarques et calculs formalisés ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\alpha(u+v) &= \big(\alpha(u_1+v_1), \dots, \alpha(u_N+v_N)\big) && \text{(somme de deux vecteurs)} \\
&= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \dots, \alpha u_N + \alpha v_N) && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}) \\
&= (\alpha u_1, \dots, \alpha u_N) + (\alpha v_1, \dots, \alpha v_N) && \text{(somme de deux vecteurs)} \\
&= \alpha u + \alpha v.
\end{aligned}$$

Question 2.

(a) *Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Complétez les phrases suivantes*[1] *:*

$$x = 0 \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \text{ et} \dots \text{et } x_n = 0}$$

$$x \neq 0 \text{ si et seulement si } \boxed{x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0 \text{ ou} \dots \text{ou } x_n \neq 0}$$

(b) *On considère les trois vecteurs*

$$u = (-1, 3), \qquad v = (5, -2), \qquad \text{et} \qquad w = (\lambda, \mu - \lambda),$$

où λ et μ sont des paramètres réels. Déterminez, si possible, λ et μ pour que $u + v + w = 0$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

[1] Les phrases finales doivent être vraies mais les deux membres de l'équivalence doivent être différents.

$$\begin{aligned} u+v+w &= (-1,3)+(5,-2)+(\lambda,\mu-\lambda) \\ &= (-1+5+\lambda,3-2+\mu-\lambda) \qquad \text{(somme de vecteurs)} \\ &= (4+\lambda,1+\mu-\lambda). \end{aligned}$$

Donc $u+v+w=0=(0,0)$ ssi $4+\lambda=0$ et $1+\mu-\lambda=0$ (égalité de deux couples), c'est-à-dire ssi $\lambda=-4$ et $\mu=\lambda-1=-5$.

Question 3.

(a) *Soient les vecteurs* $u=(0,-3,2,5)$ *et* $v=(-1,7,1,3)$*. Calculez*

- $2u-3v=2(0,-3,2,5)-3(-1,7,1,3)=(0,-6,4,10)-(-3,21,3,9)=(3,-27,1,1)$.
- $(u|v)=0\cdot(-1)+(-3)\cdot 7+2\cdot 1+5\cdot 3=-4$.

(b) *Donnez les composantes du vecteur x dont l'origine est le point* $(3,-2)$ *et l'extrémité est le point* $(-3,-2)$.

C'est le vecteur $(-3,-2)-(3,-2)=(-6,0)$.

Question 4. *Écrivez les expressions suivantes sous forme d'une fraction :*

- $\dfrac{4}{17}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{4\cdot 8-5\cdot 17}{17\cdot 8}=\dfrac{32-85}{136}=\dfrac{-53}{136}$
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{x}=\dfrac{ax+bc}{bx}$
- $\dfrac{a}{y}\cdot\dfrac{x}{b}=\dfrac{ax}{yb}$

Question 5. *Montrez que* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *est solution de* $X^3-2X-1=0$*. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

On a $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. En posant $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on remarque que $\varphi^2=\varphi+1$. Par conséquent $\varphi^3=\varphi\cdot\varphi^2=\varphi\cdot(\varphi+1)=\varphi^2+\varphi=\varphi+1+\varphi=2\varphi+1$, ou encore $\varphi^3-2\varphi-1=0$. Donc φ est bien solution de l'équation $X^3-2X-1=0$ (par définition de solution d'une équation).

Question 6. *Vérifiez que* $-\sqrt{10}/2$ *est solution de l'équation* $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=0.$

x_0 est solution de cette équation si et seulement si

$$\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}+\frac{1}{x_0+1}+\frac{1}{x_0+2}=0,$$

ou encore, si et seulement si

$$\frac{(x_0+1)({x_0}^2-4)+(x_0+2)({x_0}^2-1)+(x_0-1)({x_0}^2-4)+(x_0-2)({x_0}^2-1)}{(x_0-1)(x_0-2)(x_0+1)(x_0+2)}=0.$$

C'est le cas si et seulement si le numérateur s'annule :

$$\begin{aligned}
& (x_0+1)(x_0^2-4)+(x_0+2)(x_0^2-1)+(x_0-1)(x_0^2-4)+(x_0-2)(x_0^2-1)=0\\
\text{ssi}\quad & (x_0^2-4)\big((x_0+1)+(x_0-1)\big)+(x_0^2-1)\big((x_0+2)+(x_0-2)\big)=0\\
\text{ssi}\quad & ({x_0}^2-4)2x_0+({x_0}^2-1)2x_0=0\\
\text{ssi}\quad & 2x_0(2{x_0}^2-5)=0\\
\text{ssi}\quad & 2x_0=0 \quad\text{ou}\quad 2{x_0}^2-5=0.
\end{aligned}$$

Puisque $-\sqrt{10}/2\neq 0$, il suffit de vérifier que $2(-\sqrt{10}/2)^2-5=0$, c'est-à-dire $2\dfrac{10}{4}-5=0$ ce qui est vrai.

Question 7. *Soit* $\Delta=q^2/4+p^3/27$ *et supposons que* $\Delta\geqslant 0$. *Prouver que*

$$r=r_1+r_2 \quad \textit{avec} \quad r_1=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}} \quad \textit{et} \quad r_2=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}}$$

est solution de l'équation $z^3+pz+q=0$.

On a

$$r=r_1+r_2=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}}$$

et on doit vérifier que $r^3+pr+q=0$. Commençons par calculer r^3.

$$\begin{aligned}
r^3=(r_1+r_2)^3 &= r_1^3+3r_1^2r_2+3r_1r_2^2+r_2^3\\
&= -\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta}+3r_1r_2(r_1+r_2)+\big(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta}\big)\\
&= -q+3\Big(\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\Delta})(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\Delta})}\Big)r\\
&= -q+3\Big(\sqrt[3]{\tfrac{q^2}{4}-\Delta}\Big)r\\
&= -q+\Big(\sqrt[3]{\tfrac{q^2}{4}-\tfrac{q^2}{4}-\tfrac{p^3}{27}}\Big)r && \text{(par définition de } \Delta)\\
&= -q+\Big(\sqrt[3]{-\tfrac{p^3}{27}}\Big)r\\
&= -q+(3\tfrac{-p}{3})r && \text{(la racine cubique est unique dans } \mathbb{R})\\
&= -q-pr
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $r^3+pr+q=0$, ce qu'il fallait démontrer.