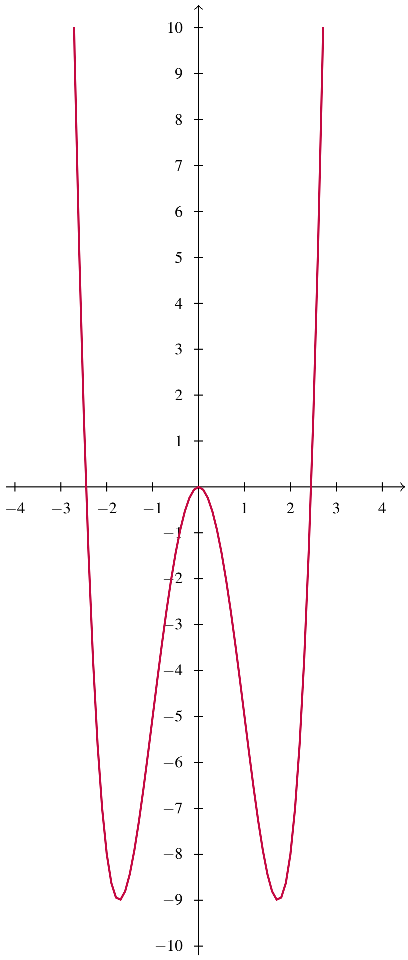
Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (29 septembre 2010) **Correction**



Question 1. *Sur le graphique ci-contre, esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 6x^2$. Expliquez votre démarche. La qualité de celle-ci est importante.*

Commençons par remarquer que la fonction f est paire. En effet quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = f(x)$. Son graphe possède donc une symétrie orthogonale d'axe y. Lorsque $x \approx 0$, x^4 est beaucoup plus petit que x^2 et donc $f(x) \approx -6x^2$. Lorsque $x > 0$ est grand, x^4 est beaucoup plus grand que x^2 et donc $f(x) \approx x^4$. (On peut aussi calculer les racines de f qui sont 0, $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.)

Question 2. *Calculez la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :*

- $z_1 := -\dfrac{1}{2} - \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  On a $|z_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2} = 1$. Finalement, on a $z_1 = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$.

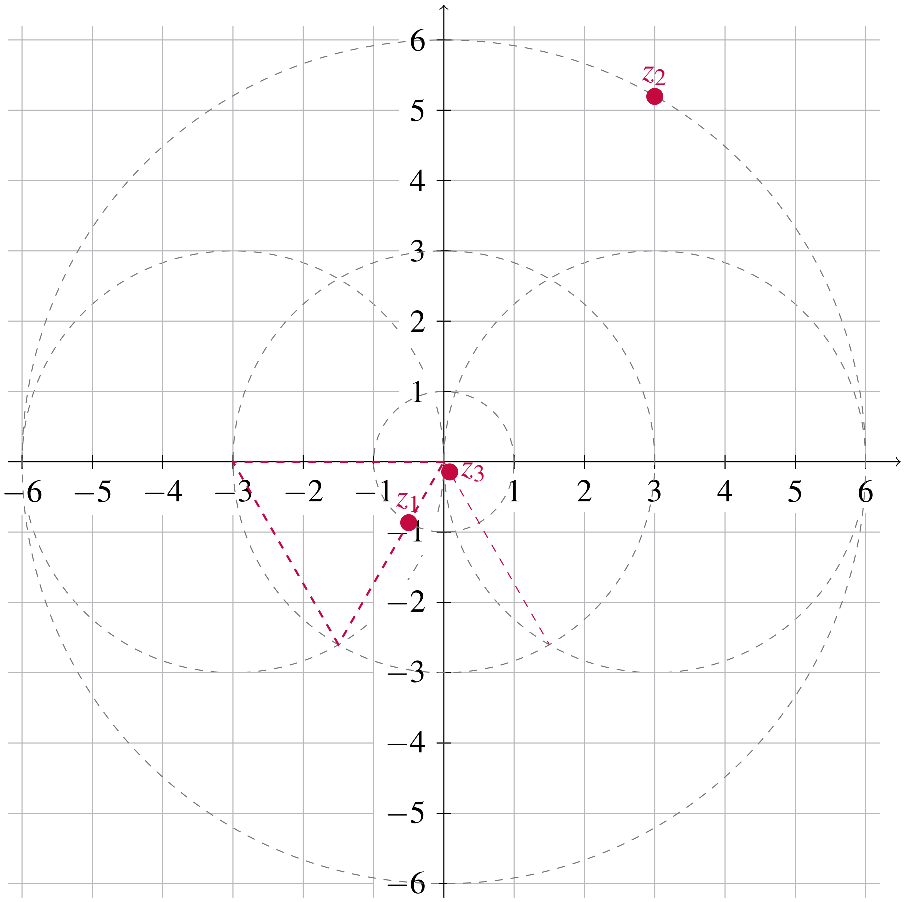
- $z_2 := 3 + 3\sqrt{3}\boldsymbol{i}$

  On a $|z_2| = |6 \cdot (\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2})| = 6$; $\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le conjugué de $\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z_2 = 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

- $z_3 := \left(3 + 3\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^{-1}$

  On a $z_3 = z_2^{-1}$, donc $|z_3| = |z_2^{-1}| = |z_2|^{-1} = \frac{1}{6}$ (par la règle $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, pour tout $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$). Puisque l'argument de z_2^{-1} est l'opposé de l'argument de z_2, ou encore l'argument du conjugué, on a $z_3 = \frac{1}{6} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$.

Représentez ces nombres sur le dessin ci-dessous.



Le triangle équilatéral, construit à l'aide des cercles, peut être utilisé pour déterminer l'angle correct pour z_1 (et de manière similaire pour z_3).

Question 3.

- *Calculer* $|5\boldsymbol{i}+3|$ *et* $|(5\boldsymbol{i}+3)^2|$.
- *Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :* $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ *et* $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{17}$.

Voir la correction de l'examen du 28 octobre 2002, question 12.

Question 4.

(a) *Définissez « $a \in \mathbb{R}$ est le maximum de l'ensemble A ».*

(b) *À partir de cette définition, prouvez l'unicité du maximum.*

(a) a est le maximum de A s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} a \in A \quad \text{et} \\ \text{pour tout } x \in A,\ x \leqslant a \end{cases} \tag{1}$$

(b) Supposons que a_1 et a_2 vérifient tous deux la définition (1). Montrons que $a_1 = a_2$. Il suffit de montrer que $a_1 \leqslant a_2$ puisqu'en échangeant a_1 et a_2 dans l'argument ci-dessous on aura $a_2 \leqslant a_1$ et donc $a_1 = a_2$. Puisque $a_1 \in A$, on peut particulariser la seconde partie de la définition (1) pour a_2 à $x = a_1$, on a $a_1 \leqslant a_2$.

Question 5. *Soit la droite D passant par les points (α_1, β_1) et (α_2, β_2) où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (il n'est par contre pas exclu que $\beta_1 = \beta_2$).*

(a) Donnez, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, un vecteur directeur et un vecteur normal de D.

(b) Donnez une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.

(c) Donnez, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, les coordonnées du point d'intersection entre D et l'axe des y.

(a) On a vu au cours qu'un vecteur directeur de D est $(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1)$. Un vecteur normal de D sera orthogonal à ce vecteur directeur. Un vecteur normal de D est donc $(\beta_1 - \beta_2, \alpha_2 - \alpha_1)$. En effet,

$$\begin{aligned}\big((\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1) \bigm| (\beta_1 - \beta_2, \alpha_2 - \alpha_1)\big) &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1 - \beta_2) - (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Par (a), nous connaissons un vecteur normal de D. Donc une équation cartésienne de D est de la forme $(\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. On sait de plus que le point $(\alpha_1, \beta_1) \in D$. En remplaçant dans l'équation x par α_1 et y par β_1, nous obtenons

$$c = (\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\beta_1 = \alpha 2\beta_1 - \alpha_1\beta_2.$$

Donc

$$D \equiv (\beta_1 - \beta_2)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2.$$

(c) Rechercher le point d'intersection en D et l'axe y revient à chercher le point de D dont l'abscisse est nulle. En remplaçant x par 0 dans l'équation cartésienne de D, on trouve $y = \dfrac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$ (y est bien défini car $\alpha_2 \neq \alpha_1$ par hypothèse). Le point recherché est donc $\Big(0, \dfrac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\Big)$.

Question 6.

(a) *Donnez une équation paramétrique de la droite D_1 passant par le point $(42,-3)$ et parallèle à la droite $D \equiv -2x+1=0$.*

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 dont l'ordonnée à l'origine vaut -5 et qui est perpendiculaire à la droite D' passant par les points $(2,0)$ et $(0,-3)$.*

(a) Cherchons un vecteur directeur de la droite D. Un vecteur normal de D se lit sur l'équation : $(-2,0)$. Comme D et D_1 sont parallèles, un vecteur directeur de D_1 sera orthogonal à $(-2,0)$. Prenons le vecteur $(0,1)$. On a bien $\big((0,1) \mid (-2,0)\big) = 0$. Puisque $(42,-3) \in D_1$, une équation paramétrique de D_1 sera $(x,y) \equiv (42,-3) + \lambda(0,1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Dire que l'ordonnée à l'origine vaut -5 signifie que $(0,-5) \in D_2$. Cherchons un vecteur normal de D_2. Comme D_2 et D' sont perpendiculaires, un vecteur directeur de D' sera un vecteur normal de D_2. Comme D' passe par $(2,0)$ et $(0,-3)$, un vecteur directeur de D' est $(0-2,-3-0) = (-2,-3)$. Donc $D_2 \equiv -2x-3y = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Comme $(0,-5) \in D_2$, on a, en remplaçant x par 0 et y par -5 dans cette équation, que $c = -2 \cdot 0 - 3 \cdot (-5) = 15$. Donc $D_2 \equiv -2x-3y = 15$.

Question 7. *L'énoncé suivant est-il vérifié :*

$$\textit{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z^{-1} = |z^{-1}| \cdot \bar{z} \ \ ?$$

Justifiez votre réponse.

Cet énoncé est faux car quand z^{-1} existe, on a vu (au cours) $z^{-1} = |z^{-2}| \cdot \bar{z}$. Et donc, si l'énoncé était vrai, on aurait $|z^{-2}| \cdot \bar{z}$. Et puisque si $z \neq 0$, on a $\bar{z} = 0$, on obtiendrait, en multipliant chaque membre par $\bar{z}^{-1}, |z^{-2}| = |z^{-1}|$, ce qui n'est vrai que si $\bar{z} = 1$ (clairement faux, par exemple, si $z = 2$).

REMARQUE : Un argument alternatif se base sur la différence d'homogénéité des deux membres. En effet, supposons que ce soit vrai. Prenons un $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (au hasard) et $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$. L'énoncé appliqué à λz devient :

$$\lambda^{-1} z^{-1} = |\lambda^{-1} z^{-1}| \cdot \lambda \bar{z} = |z^{-1}| \cdot \bar{z},$$

ou encore $\lambda = |z^{-1}| \cdot \bar{z} \cdot z$. Comme λ est arbitraire, on obtient une contradiction.

Question 8. *Calculez, s'il existe,* $\min\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 1\}$. *Justifiez votre réponse en utilisant la définition du minimum.*

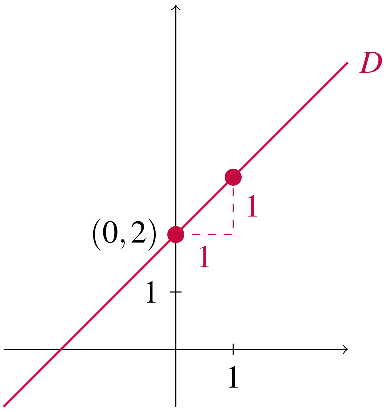
Montrons que $\min\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 1\} = -1$.

- Tout d'abord $-1 \in \min\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 1\}$ car $(-1)^2 = 1 \leqslant 1$.
- Soit $x \in \min\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 1\}$ (arbitraire), c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^2 \leqslant 1$. Il faut montrer que $-1 \leqslant x$. Or $x^2 \leqslant 1$ est vérifié ssi $-1 \leqslant x \leqslant 1$, et donc en particulier $-1 \leqslant x$.

Question 9. *Décrivez géométriquement les ensembles suivants et représentez les graphiquement :*

$$A := \{(\alpha, \alpha+2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \textit{et} \qquad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \big((x,y)\big|(-2,1)\big) = 0\}.$$

L'ensemble A est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = \alpha$ et $y = \alpha + 2$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $(x,y) \in A$ ssi $(x,y) = (0,2) + \alpha(1,1)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble A décrit donc la droite D passant par $(0,2)$ et dont un vecteur directeur est $(1,1)$.



L'ensemble B est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}$ tels que $-2x + y = 0$ (par définition du produit scalaire). L'ensemble B décrit donc la droite D' passant par l'origine et dont un vecteur normal est $(-2,1)$.