

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(4 octobre 2010)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez $|(-3 - i)^6|$ sans calculer $(-3 - i)^6$.

/2

Question 2. Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et périodique. Prouvez qu'elle satisfait ces deux conditions.

/2

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ les vecteurs définis par

$$x = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad y = (1, 2, \dots, N).$$

Montrez par récurrence que, pour tout $N \geq 1$, on a $(x|y) = \frac{N(N+1)}{2}$.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4. Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives $D \equiv ax + by + c = 0$ et $D' \equiv a'x + b'y + c' = 0$.

/6

- (a) Donnez, en fonction de a , b et c , un vecteur normal et un vecteur directeur de D .
- (b) Sous quelle(s) condition(s) sur a , b , c , la pente de D est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?
- (c) Sous les conditions trouvées en (b), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1 . Expliquez votre raisonnement.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

/3

Question 5. Soient D_1 et D_2 deux droites d'équations

$$D_1 \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_2 \equiv (x, y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \mu(-3, 9), \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Ces deux droites sont-elles confondues ? Expliquez votre raisonnement.

Nom : _____

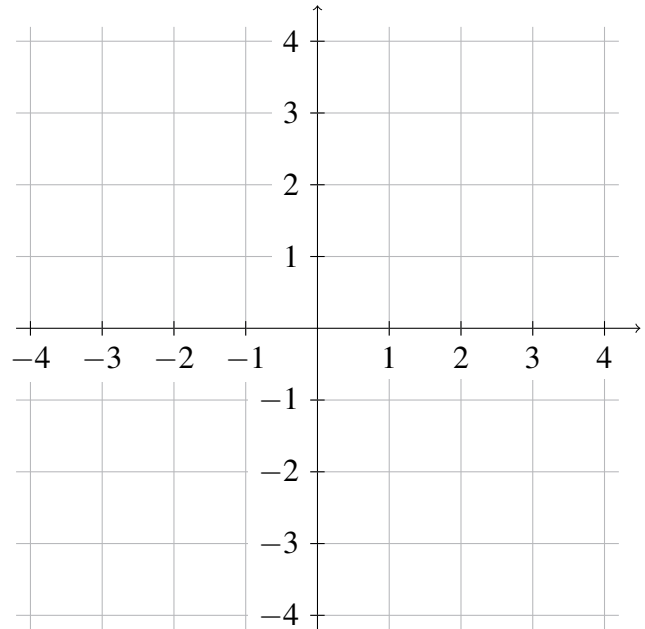
Prénom : _____

Section : _____

Question 6.

- Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^2 + 2iX - 10 = 0$ (où $i^2 = -1$).
- Représentez les solutions trouvées au point précédent dans le plan complexe.

/4



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 7. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle injective, surjective, et/ou périodique ?
Justifiez vos affirmations.

/4

Question 8. Montrez que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire, alors elle ne peut être injective.
Veuillez rappeler les définitions de ces propriétés et faites attention à la qualité de votre rédaction.

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Donnez la forme trigonométrique des complexes $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et représentez-les dans le plan complexe. Que pouvez-vous conclure ?

/6

