Mathématiques Élémentaires

Test n° 4 (4 octobre 2010) Correction

Question 1. *Calculez $|(-3-\boldsymbol{i})^6|$ sans calculer $(-3-\boldsymbol{i})^6$.*

En utilisant le fait qu'on a vu au cours que, quels que soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$, on obtient

$$\left|(-3-\boldsymbol{i})^6\right| = |-3-\boldsymbol{i}|^6 = \left(\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\right)^6 = \left(10^{1/2}\right)^6 = 10^3 = 1000.$$

Question 2. *Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et périodique. Prouvez qu'elle satisfait ces deux conditions.*

Choisissons $f(x) = \cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est paire car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$. Cette fonction est également 2π-périodique car la définition du cosinus implique que $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 3. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ les vecteurs définis par*

$$x = (1,1,\dots,1) \qquad \text{et} \qquad y = (1,2,\dots,N).$$

Montrez par récurrence que, pour tout $N \geqslant 1$, on a $(x|y) = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

CAS DE BASE : $N = 1$. Dans ce cas, on a $x = 1$ et $y = 1$. Le premier membre vaut $(x|y) = 1 \cdot 1 = 1$ et le second membre vaut $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Les deux membres sont donc égaux.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE : On suppose que la propriété est vraie quel que soit $N \leqslant K$, où $K \geqslant 1$. En particulier, si $N = K$, on a $x = (1,\dots,1)$ et $y = (1,2,\dots,K)$ et on suppose donc $(x|y) = 1+2+\dots+K = \frac{K(K+1)}{2}$. Montrons que la propriété est encore vérifiée lorsque $N = K+1$. On a alors $x = (1,\dots,1)$ et $y = (1,2,\dots,K+1)$ et on doit montrer que $(x|y) = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
(x|y) &= 1+2+\dots+K+(K+1) && \text{(par définition du produit scalaire)}\\
&= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) && \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= (K+1)\left(\frac{K}{2}+1\right) && \text{(mise en évidence de } K+1\text{)}\\
&= \frac{(K+1)(K+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Question 4. *Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives $D \equiv ax+by+c=0$ et $D' \equiv a'x+b'y+c'=0$.*

(a) *Donnez, en fonction de a, b et c, un vecteur normal et un vecteur directeur de D.*

(b) *Sous quelle(s) condition(s) sur a, b, c, la pente de D est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?*

(c) *Sous les conditions trouvées en (b), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1. Expliquez votre raisonnement.*

(a) On a vu au cours qu'un vecteur normal de D est (a,b). Un vecteur directeur de D est donné par $(-b,a)$ car ce vecteur est orthogonal à (a,b). En effet $\big((a,b) \mid (-b,a)\big) = -ab+ab = 0$.

(b) La pente de D est définie si $b \neq 0$. Il n'y a pas de condition sur a et c. Lorsque $b \neq 0$, la pente vaut $-a/b$.

(c) Supposons que $b,b' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nous savons qu'un vecteur normal de D (resp. D') est (a,b) (resp. (a',b')) et que la pente de D (resp. D') est $-a/b$ (resp. $-a'/b'$). Les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs (a,b) et (a',b') sont orthogaux, c'est-à-dire si et seulement si leur produit scalaire s'annule. On a

$$\begin{aligned}
\big((a,b) \mid (a',b')\big) = 0 \quad &\text{ssi} \quad aa'+bb' = 0\\
&\text{ssi} \quad aa' = -bb'\\
&\text{ssi} \quad \frac{aa'}{bb'} = -1 \qquad \text{(on peut diviser par } bb' \text{ car } b,b' \in \mathbb{R}\setminus\{0\})\\
&\text{ssi} \quad \frac{-a}{b}\cdot\frac{-a'}{b'} = -1.
\end{aligned}$$

Les deux droites sont donc perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1.

Question 5. *Soient D_1 et D_2 deux droites d'équations*

$$\begin{aligned}
D_1 &\equiv (x,y) = (0,2)+\lambda(1,-3), \quad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R},\\
D_2 &\equiv (x,y) = (\tfrac{2}{3},0)+\mu(-3,9), \quad \textit{où } \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

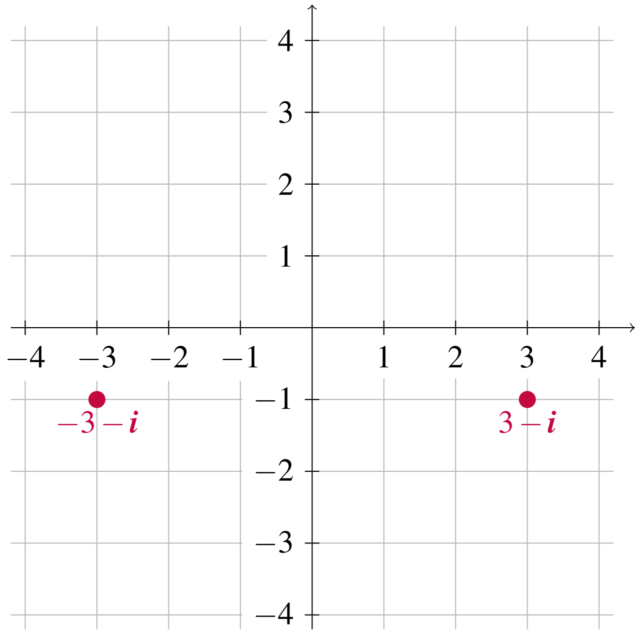
Ces deux droites sont-elles confondues ? Expliquez votre raisonnement.

Un vecteur directeur de D_1 est $(1,-3)$ et un vecteur directeur de D_2 est $(-3,9)$. On a vu au cours que les deux droites sont parallèles si et seulement s'il existe un $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $(-3,9) = k(1,-3)$. Il suffit de prendre $k = 3$. Ces deux droites étant parallèles, pour savoir si elles sont confondues il suffit de savoir si elles ont un point en commun. L'équation de D_1 nous dit que $(0,2) \in D_1$. Ce point appartient-il à D_2 ? Autrement dit, peut-on trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(0,2) = (\frac{2}{3},0)+\mu(-3,9)$, c'est-à-dire $(0,2) = (\frac{2}{3}-3\mu, 9\mu)$, ou encore $0 = \frac{2}{3}-3\mu$ et $2 = 9\mu$. La deuxième égalité nous dit que $\mu = \frac{2}{9}$. En remplaçant dans la première égalité, nous obtenons $0 = \frac{2}{3}-3\frac{2}{9} = 0$. Donc $(0,2) \in D_2$, ce qui prouve que les deux droites sont parallèles.

Question 6.

- *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^2 + 2\boldsymbol{i}X - 10 = 0$ (où $\boldsymbol{i}^2 = -1$).*
- *Représentez les solutions trouvées au point précédent dans le plan complexe.*

On calcule, dans un premier temps, le discriminant de l'équation. Il est égal à $(2\boldsymbol{i})^2 - 4(-10) = -4 + 40 = 36$. L'équation auxiliaire $Y^2 = 36$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont $y_1 = 6$ et $y_2 = -6$. En conséquence, l'équation $X^2 + 2\boldsymbol{i}X - 10 = 0$ a pour solutions $x_1 = \frac{-2\boldsymbol{i}+y_1}{2} = 3 - \boldsymbol{i}$ et $x_2 = \frac{-2\boldsymbol{i}+y_2}{2} = -3 - \boldsymbol{i}$.



Question 7. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle injective, surjective, et/ou périodique ? Justifiez vos affirmations.*

La fonction f n'est pas injective. En effet $f(2\pi) = \cos^2(2\pi) = 0 = \cos^2(0) = f(0)$ ce qui contredit la définition d'injectivité qui demande que, quels que soient $x_1 \neq x_2$ (en particulier pour $x_1 = 2\pi$ et $x_2 = 0$), on aie $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Cette fonction n'est pas non plus surjective car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) = \cos^2(x) \leqslant 1$. Par conséquent, pour $y = 2$ (par exemple), il est impossible de trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

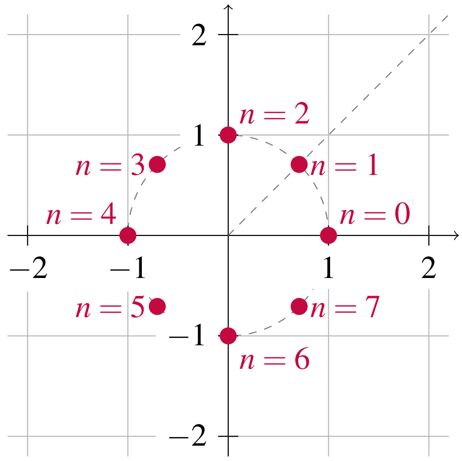
Finalement, f est π-périodique vu que $f(x+\pi) = (\cos(x+\pi))^2 = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 8. *Montrez que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, alors elle ne peut être injective. Veuillez rappeler les définitions de ces propriétés et faites attention à la qualité de votre rédaction.*

Le fait que f soit paire nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Pour montrer que f n'est pas injective, il faut montrer que l'implication $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ n'est pas valable pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) une paire x_1, x_2 de réels tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Prenons par exemple $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$. On a bien $x_1 \neq x_2$ et la parité de la fonction implique que $f(x_1) = f(x_2)$.

Question 9. *Donnez la forme trigonométrique des complexes* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$ *et représentez-les dans le plan complexe. Que pouvez-vous conclure ?*

Vu que $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$. On a que $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$ appartient au cercle unité. D'autre part, puisque l'abscisse et l'ordonnée sont égales et positives, $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$ est situé sur la bissectrice du premier quadrant et donc s'écrit, sous forme trigonométrique, $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^n$. Puisque $(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^8 = \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{4} \bmod 2\pi\right) = \operatorname{cis}(0) = 1$, on obtient, si $n = 8q + (n \bmod 8)$,



$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^n &= \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{8q+(n \bmod 8)} \\
&= \left(\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^8\right)^q \cdot \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{n \bmod 8} \\
&= 1^q \cdot \operatorname{cis}\left((n \bmod 8)\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \operatorname{cis}\left((n \bmod 8)\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ prend exactement 8 valeurs distinctes.