

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(4 octobre 2010)

Correction

Question 1. Calculez $|(-3 - i)^6|$ sans calculer $(-3 - i)^6$.

En utilisant le fait qu'on a vu au cours que, quels que soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$, on obtient

$$|(-3 - i)^6| = |-3 - i|^6 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}\right)^6 = (10^{1/2})^6 = 10^3 = 1000.$$

Question 2. Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et périodique. Prouvez qu'elle satisfait ces deux conditions.

Choisissons $f(x) = \cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est paire car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$. Cette fonction est également 2π -périodique car la définition du cosinus implique que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^N$ les vecteurs définis par

$$x = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad y = (1, 2, \dots, N).$$

Montrez par récurrence que, pour tout $N \geq 1$, on a $(x|y) = \frac{N(N+1)}{2}$.

CAS DE BASE : $N = 1$. Dans ce cas, on a $x = 1$ et $y = 1$. Le premier membre vaut $(x|y) = 1 \cdot 1 = 1$ et le second membre vaut $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Les deux membres sont donc égaux.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE : On suppose que la propriété est vraie quel que soit $N \leq K$, où $K \geq 1$. En particulier, si $N = K$, on a $x = (1, \dots, 1)$ et $y = (1, 2, \dots, K)$ et on suppose donc $(x|y) = 1 + 2 + \dots + K = \frac{K(K+1)}{2}$. Montrons que la propriété est encore vérifiée lorsque $N = K + 1$. On a alors $x = (1, \dots, 1)$ et $y = (1, 2, \dots, K + 1)$ et on doit montrer que $(x|y) = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} (x|y) &= 1 + 2 + \dots + K + (K + 1) && \text{(par définition du produit scalaire)} \\ &= \frac{K(K+1)}{2} + (K + 1) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (K + 1) \left(\frac{K}{2} + 1 \right) && \text{(mise en évidence de } K + 1) \\ &= \frac{(K + 1)(K + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Question 4. Soient D et D' deux droites du plan d'équations respectives $D \equiv ax + by + c = 0$ et $D' \equiv a'x + b'y + c' = 0$.

- (a) Donnez, en fonction de a , b et c , un vecteur normal et un vecteur directeur de D .
- (b) Sous quelle(s) condition(s) sur a , b , c , la pente de D est-elle définie ? Que vaut alors cette pente ?
- (c) Sous les conditions trouvées en (b), prouvez à l'aide de la notion de produit scalaire que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1 . Expliquez votre raisonnement.

- (a) On a vu au cours qu'un vecteur normal de D est (a, b) . Un vecteur directeur de D est donné par $(-b, a)$ car ce vecteur est orthogonal à (a, b) . En effet $((a, b) \mid (-b, a)) = -ab + ab = 0$.
- (b) La pente de D est définie si $b \neq 0$. Il n'y a pas de condition sur a et c . Lorsque $b \neq 0$, la pente vaut $-a/b$.
- (c) Supposons que $b, b' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous savons qu'un vecteur normal de D (resp. D') est (a, b) (resp. (a', b')) et que la pente de D (resp. D') est $-a/b$ (resp. $-a'/b'$). Les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs (a, b) et (a', b') sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si leur produit scalaire s'annule. On a

$$\begin{aligned} ((a, b) \mid (-b, a)) = 0 & \text{ ssi } aa' + bb' = 0 \\ & \text{ ssi } aa' = -bb' \\ & \text{ ssi } \frac{aa'}{bb'} = -1 \quad (\text{on peut diviser par } bb' \text{ car } b, b' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ & \text{ ssi } \frac{-a}{b} \cdot \frac{-a'}{b'} = -1. \end{aligned}$$

Les deux droites sont donc perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1 .

Question 5. Soient D_1 et D_2 deux droites d'équations

$$D_1 \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_2 \equiv (x, y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \mu(-3, 9), \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}.$$

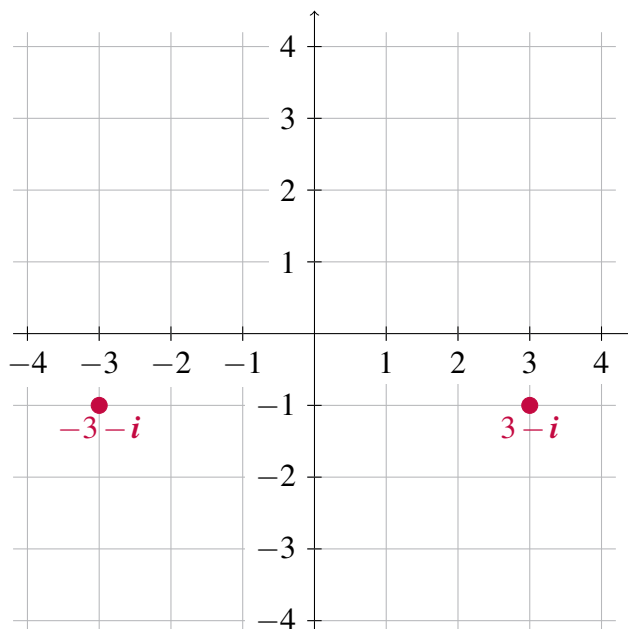
Ces deux droites sont-elles confondues ? Expliquez votre raisonnement.

Un vecteur directeur de D_1 est $(1, -3)$ et un vecteur directeur de D_2 est $(-3, 9)$. On a vu au cours que les deux droites sont parallèles si et seulement s'il existe un $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $(-3, 9) = k(1, -3)$. Il suffit de prendre $k = 3$. Ces deux droites étant parallèles, pour savoir si elles sont confondues il suffit de savoir si elles ont un point en commun. L'équation de D_1 nous dit que $(0, 2) \in D_1$. Ce point appartient-il à D_2 ? Autrement dit, peut-on trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(0, 2) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) + \mu(-3, 9)$, c'est-à-dire $(0, 2) = \left(\frac{2}{3} - 3\mu, 9\mu\right)$, ou encore $0 = \frac{2}{3} - 3\mu$ et $2 = 9\mu$. La deuxième égalité nous dit que $\mu = \frac{2}{9}$. En remplaçant dans la première égalité, nous obtenons $0 = \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{2}{9} = 0$. Donc $(0, 2) \in D_2$, ce qui prouve que les deux droites sont parallèles.

Question 6.

- Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^2 + 2iX - 10 = 0$ (où $i^2 = -1$).
- Représentez les solutions trouvées au point précédent dans le plan complexe.

On calcule, dans un premier temps, le discriminant de l'équation. Il est égal à $(2i)^2 - 4(-10) = -4 + 40 = 36$. L'équation auxiliaire $Y^2 = 36$ admet deux solutions dans \mathbb{C} qui sont $y_1 = 6$ et $y_2 = -6$. En conséquence, l'équation $X^2 + 2iX - 10 = 0$ a pour solutions $x_1 = \frac{-2i+y_1}{2} = 3 - i$ et $x_2 = \frac{-2i+y_2}{2} = -3 - i$.



Question 7. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle injective, surjective, et/ou périodique ? Justifiez vos affirmations.

La fonction f n'est pas injective. En effet $f(2\pi) = \cos^2(2\pi) = 0 = \cos^2(0) = f(0)$ ce qui contredit la définition d'injectivité qui demande que, quels que soient $x_1 \neq x_2$ (en particulier pour $x_1 = 2\pi$ et $x_2 = 0$), on aie $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Cette fonction n'est pas non plus surjective car, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) = \cos^2(x) \leq 1$. Par conséquent, pour $y = 2$ (par exemple), il est impossible de trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Finalement, f est π -périodique vu que $f(x + \pi) = (\cos(x + \pi))^2 = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 8. Montrez que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire, alors elle ne peut être injective. Veuillez rappeler les définitions de ces propriétés et faites attention à la qualité de votre rédaction.

Le fait que f soit paire nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Pour montrer que f n'est pas injective, il faut montrer que l'implication $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ n'est pas valable pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe (au moins) une paire x_1, x_2 de réels tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Prenons par exemple $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$. On a bien $x_1 \neq x_2$ et la parité de la fonction implique que $f(x_1) = f(x_2)$.

Question 9. *Donnez la forme trigonométrique des complexes $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et représentez-les dans le plan complexe. Que pouvez-vous conclure ?*

Vu que $\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$. On a que $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ appartient au cercle unité. D'autre part, puisque l'abscisse et l'ordonnée sont égales et positives, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ est situé sur la bissectrice du premier quadrant et donc s'écrit, sous forme trigonométrique, $\text{cis} \frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = \left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^n$. Puisque $\left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^8 = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{4} \bmod 2\pi\right) = \text{cis}(0) = 1$, on obtient, si $n = 8q + (n \bmod 8)$,

$$\begin{aligned} \left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^n &= \left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{8q + (n \bmod 8)} \\ &= \left(\left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^8\right)^q \cdot \left(\text{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{n \bmod 8} \\ &= 1^q \cdot \text{cis}\left((n \bmod 8) \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \text{cis}\left((n \bmod 8) \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n$ prend exactement 8 valeurs distinctes.

