Mathématiques Élémentaires

Test n° 5 (11 octobre 2010) Correction

Question 1. *Soit $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ et $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite passant par z_1 et z_2 en fonction de ρ_1, θ_1, ρ_2, θ_2.*

Les coordonnées de z_1 sont $(\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \sin\theta_1)$ et celles de z_2 sont $(\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \sin\theta_2)$. Par conséquent la pente de la droite passant par ces deux points est $\dfrac{\rho_1 \sin\theta_1 - \rho_2 \sin\theta_2}{\rho_1 \cos\theta_1 - \rho_2 \cos\theta_2}$. La pente existe donc si $\rho_1 \cos\theta_1 \neq \rho_2 \cos\theta_2$.

Question 2.

(a) *Donnez la table de vérité de $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$.*

(b) *Donnez une proposition « simple » équivalente à (a).*

(a)

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee Q \iff \neg P \wedge Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

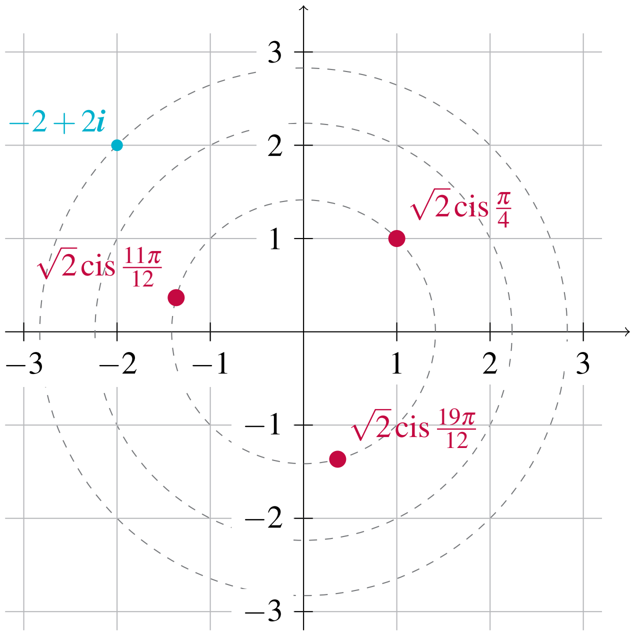
(b) On voit que $\neg P$ est équivalente à la proposition (a).

Question 3. *Donnez, en bon français, la contraposée de la phrase « si je réussis, alors je partirai en vacances ».*

La phrase est de la forme $A \Rightarrow B$; par conséquent sa contraposée est $\neg B \Rightarrow \neg A$. En français, cela donne : « Si je ne pars pas en vacances alors je n'ai pas réussi ».

Question 4. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = -2+2\boldsymbol{i}$. Représentez les solutions dans le plan complexe.*

Le module de $-2+2\boldsymbol{i}$ est $\sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. De plus, $-2+2\boldsymbol{i}$ se trouve sur la bissectrice du quadrant « x négatif et y positif » (c'est-à-dire abscisse négative et ordonnée positive). Par conséquent $-2+2\boldsymbol{i} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$.
Il s'ensuit qu'une solution particulière de $X^3 = -2+2\boldsymbol{i}$ est $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. En effet $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3 = 2\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, les solutions de $X^3 = -2+2\boldsymbol{i}$ sont $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot u$ où u est solution de $X^3 = 1$, c'est-à-dire que les solutions sont $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot 1$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$; ou encore $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}$ et $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$.



Question 5. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $B\cdot A^t$, $A\cdot D$, $C\cdot D$ et $D\cdot C$.

$$\begin{aligned} B\cdot A^t &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cdot(-3)+(-1)\cdot 0 & 4\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 4\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ 0\cdot(-3)+2\cdot 0 & 0\cdot(-1)+2\cdot 2 & 0\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ et $D \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, on ne peut pas calculer $A\cdot D$ car le nombre de colonnes de A (ici 2) n'est pas égal au nombre de lignes de D (ici 3).

$$C\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4) \end{pmatrix} = 6.$$

$$D\cdot C = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 0 & -2\cdot(-2) \\ -3\cdot 1 & -3\cdot 0 & -3\cdot(-2) \\ -4\cdot 1 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Question 6. *Calculez*

- $\partial_t^2\big(\sin(\lambda t)\big) = \partial_t\big(\partial_t(\sin(\lambda t))\big) = \partial_t\big(\cos(\lambda t)\,\partial_t(\lambda t)\big) = \partial_t\big(\lambda\cos(\lambda t)\big) = \lambda\,\partial_t\big(\cos(\lambda t)\big)$
  $= \lambda\big(-\sin(\lambda t)\,\partial_t(\lambda t)\big) = \lambda\big(-\lambda\sin(\lambda t)\big) = -\lambda^2\sin(\lambda t).$
- $\partial_u\big(\exp(3u^2)\cdot\sin(\cos(au))\big) = \partial_u\big(\exp(3u^2)\big)\cdot\sin(\cos(au)) + \exp(3u^2)\cdot\partial_u\big(\sin(\cos(au))\big).$
  La dérivée de chacun des termes vaut
  - $\partial_u\big(\exp(3u^2)\big) = \partial_u\big(\exp(v)|_{v=3u^2}\big) = \big(\partial_v\exp(v)\big)\big|_{v=3u^2}\cdot\partial_u(3u^2) = \exp(3u^2)\cdot 6u.$
  - $\partial_u\big(\sin(\cos(au))\big) = \partial_u\big(\sin(v)|_{v=\cos(au)}\big) = \big(\partial_v\sin(v)\big)\big|_{v=\cos(au)}\cdot\partial_u\big(\cos(au)\big)$
    $= \cos(\cos(au))\cdot\partial_u\big(\cos(w)|_{w=au}\big) = \cos(\cos(au))\cdot\big(-\sin(au)\cdot a\big)$
    $= -a\sin(au)\cos(\cos(au))$

  Donc, au final, la dérivée demandée est $\partial_u\big(\exp(3u^2)\cdot\sin(\cos(au))\big) = 6u\,e^{3u^2}\cdot\sin(\cos(au)) - a\,e^{3u^2}\sin(au)\cos(\cos(au))$.

Question 7. *Soient les droites*

$$D_1 \equiv x - my + m^2 = 0,$$
$$D_2 \equiv x + m^2y + m = 0,$$

où m est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de m les droites D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Expliquez votre raisonnement.*

(b) *Pour les valeurs de m pour lesquelles D_1 et D_2 sont sécantes, recherchez les coordonnées du point d'intersection.*

(a) Demander que D_1 et D_2 soient sécantes revient à demander qu'elles aient un unique point d'intersection. On a vu que cela se produit lorsque le déterminant du système formé par les équations de D_1 et D_2 est non nul.
Ce déterminant vaut $\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^2 + m$. Or $m^2+m=0$ ssi $m=0$ ou $m=-1$. Les deux droites sont donc sécantes lorsque $m \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

(b) Supposons que $m \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Les coordonnées du point d'intersection peuvent être calculées avec les formules de Cramer. On a $D_1 \equiv x - my = -m^2$ et $D_2 \equiv x + m^2y = -m$, on en déduit que le point d'intersection est (x_0, y_0) où

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -m^2 & -m \\ -m & m^2 \end{vmatrix}}{m^2+m} = \frac{-m^4-m^2}{m^2+m} = \frac{-m(m^2+1)}{m+1},$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m^2 \\ 1 & -m \end{vmatrix}}{m^2+m} = \frac{-m+m^2}{m^2+m} = \frac{m-1}{m+1}.$$

Question 8. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2$ est-elle injective, surjective, périodique ? Justifiez vos affirmations.*

Remarquons que cette fonction possède comme racines -1, 1 et 0. Elle n'est donc pas injective puisque $x_1 := 0 \neq x_2 := 1$ et $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Elle n'est pas non plus périodique vu qu'elle ne possède que trois racines (si elle était périodique, elle devrait avoir soit 0 soit une infinité de racines).
Finalement, elle n'est pas non plus surjective car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant -1$ et donc, par exemple, l'équation $f(x) = -2$ ne possède aucune solution (i.e. $-2 \notin \operatorname{Im}(f)$). La borne inférieure[1] sur f se déduit des considérations suivantes :

- si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant -1$, on a $x^4 \geqslant x^2$ et donc $f(x) \geqslant 0 \geqslant -1$;
- si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x^2 \leqslant 1$ et donc $f(x) \geqslant 0 - 1^2 = -1$.

Question 9.

(a) *Soient les droites*

$$D_1 \equiv (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(-2,1,3), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$D_2 \equiv (x,y,z) = (0,3,4) + \mu(-1,0,5), \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Recherchez, s'il existe, le point d'intersection de ces deux droites.

(b) *Soient le plan $\alpha \equiv x - 2y + 3z = \sqrt{2}$ et la droite D dont un système d'équations cartésiennes est $1 + x = 2y + 1 = z/\lambda^2$ où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la droite D est-elle parallèle au plan α ?*

(a) On a $D_1 \equiv (x,y,z) = (1-2\lambda, -1+\lambda, 2+3\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $D_2 \equiv (x,y,z) = (-\mu, 3, 4+5\mu)$ ($\mu \in \mathbb{R}$). Rechercher le point d'intersection revient à savoir si on peut trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(1-2\lambda, -1+\lambda, 2+3\lambda) = (-\mu, 3, 4+5\mu)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda = -\mu, & (1) \\ -1 + \lambda = 3, & (2) \\ 2 + 3\lambda = 4 + 5\mu. & (3) \end{cases}$$

De (2), on déduit que $\lambda = 4$ et, en remplaçant dans (1), on obtient $\mu = -1 + 2\lambda = 7$. En remplaçant λ par 4 et μ par 7 dans (3), on a $2 + 3\lambda = 14 \neq 4 + 5\mu = 39$. On en déduit que (1), (2) et (3) ne sont pas simultanément vérifiées et donc que les deux droites n'ont aucun point d'intersection.

(b) Un vecteur normal de α est $(1,-2,3)$. On a $D \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\lambda^2}$ et donc $(1, \frac{1}{2}, \lambda^2)$ est un vecteur directeur de D. La droite D est parallèle au plan α ssi un vecteur normal de α est orthogonal à un vecteur directeur de D, càd $\big((1,-2,3) \bigm| (1,\frac{1}{2},\lambda^2)\big) = 0$, c'est-à-dire $1 - 1 + 3\lambda^2 = 0$, càd $\lambda = 0$. Or $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on ne peut donc pas trouver de valeur pour λ qui fait que D soit parallèle à α.

[1] Une analyse plus fine de f permet de déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant -1/4$.