

Mathématiques Élémentaires

Test n° 5

(11 octobre 2010)

Correction

Question 1. Soit $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ et $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite passant par z_1 et z_2 en fonction de $\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2$.

Les coordonnées de z_1 sont $(\rho_1 \cos \theta_1, \rho_1 \sin \theta_1)$ et celles de z_2 sont $(\rho_2 \cos \theta_2, \rho_2 \sin \theta_2)$. Par conséquent la pente de la droite passant par ces deux points est $\frac{\rho_1 \sin \theta_1 - \rho_2 \sin \theta_2}{\rho_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \cos \theta_2}$. La pente existe donc si $\rho_1 \cos \theta_1 \neq \rho_2 \cos \theta_2$.

Question 2.

(a) Donnez la table de vérité de $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$.

(b) Donnez une proposition « simple » équivalente à (a).

(a)

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

(b) On voit que $\neg P$ est équivalente à la proposition (a).

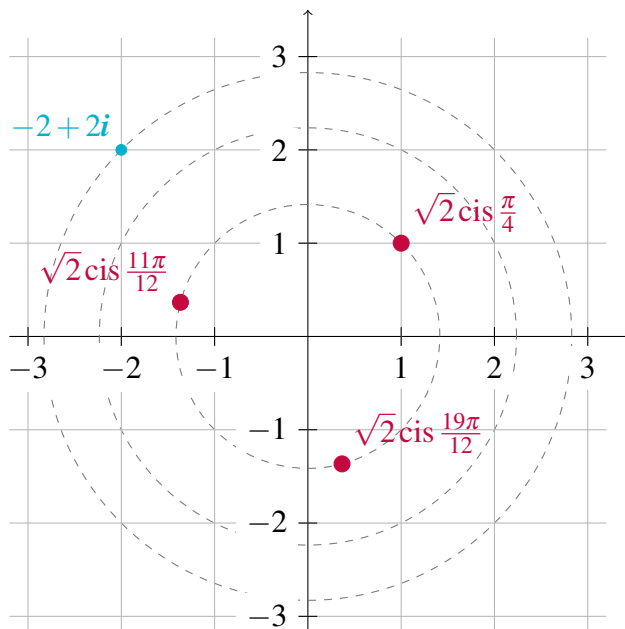
Question 3. Donnez, en bon français, la contraposée de la phrase « si je réussis, alors je partirai en vacances ».

La phrase est de la forme $A \Rightarrow B$; par conséquent sa contraposée est $\neg B \Rightarrow \neg A$. En français, cela donne : « Si je ne pars pas en vacances alors je n'ai pas réussi ».

Question 4. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $X^3 = -2 + 2i$. Représentez les solutions dans le plan complexe.

Le module de $-2 + 2i$ est $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. De plus, $-2 + 2i$ se trouve sur la bissectrice du quadrant « x négatif et y positif » (c'est-à-dire abscisse négative et ordonnée positive). Par conséquent $-2 + 2i = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$.

Il s'ensuit qu'une solution particulière de $X^3 = -2 + 2i$ est $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. En effet $(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4})^3 = (\sqrt{2})^3 (\operatorname{cis} \frac{3\pi}{4})^3 = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, les solutions de $X^3 = -2 + 2i$ sont $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot u$ où u est solution de $X^3 = 1$, c'est-à-dire que les solutions sont $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot 1$, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ et $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$; ou encore $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$ et $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}$.



Question 5. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ -2), \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Calculez, si possible, $B \cdot A^t$, $A \cdot D$, $C \cdot D$ et $D \cdot C$.

$$\begin{aligned} B \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ et $D \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, on ne peut pas calculer $A \cdot D$ car le nombre de colonnes de A (ici 2) n'est pas égal au nombre de lignes de D (ici 3).

$$C \cdot D = (1 \ 0 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4)) = 6.$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ -2) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot (-2) \\ -3 \cdot 1 & -3 \cdot 0 & -3 \cdot (-2) \\ -4 \cdot 1 & -4 \cdot 0 & -4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Question 6. Calculez

- $\partial_t^2(\sin(\lambda t)) = \partial_t(\partial_t(\sin(\lambda t))) = \partial_t(\cos(\lambda t) \partial_t(\lambda t)) = \partial_t(\lambda \cos(\lambda t)) = \lambda \partial_t(\cos(\lambda t))$
 $= \lambda(-\sin(\lambda t) \partial_t(\lambda t)) = \lambda(-\lambda \sin(\lambda t)) = -\lambda^2 \sin(\lambda t).$
- $\partial_u(\exp(3u^2) \cdot \sin(\cos(au))) = \partial_u(\exp(3u^2)) \cdot \sin(\cos(au)) + \exp(3u^2) \cdot \partial_u(\sin(\cos(au))).$

La dérivée de chacun des termes vaut

- ▶ $\partial_u(\exp(3u^2)) = \partial_u(\exp(v)|_{v=3u^2}) = (\partial_v \exp(v))|_{v=3u^2} \cdot \partial_u(3u^2) = \exp(3u^2) \cdot 6u.$
- ▶ $\partial_u(\sin(\cos(au))) = \partial_u(\sin(v)|_{v=\cos(au)}) = (\partial_v \sin(v))|_{v=\cos(au)} \cdot \partial_u(\cos(au))$
 $= \cos(\cos(au)) \cdot \partial_u(\cos(w)|_{w=au}) = \cos(\cos(au)) \cdot (-\sin(au) \cdot a)$
 $= -a \sin(au) \cos(\cos(au))$

Donc, au final, la dérivée demandée est $\partial_u(\exp(3u^2) \cdot \sin(\cos(au))) = 6ue^{3u^2} \cdot \sin(\cos(au)) - ae^{3u^2} \sin(au) \cos(\cos(au)).$

Question 7. Soient les droites

$$D_1 \equiv x - my + m^2 = 0,$$

$$D_2 \equiv x + m^2y + m = 0,$$

où m est un paramètre réel.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de m les droites D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? Expliquez votre raisonnement.
- (b) Pour les valeurs de m pour lesquelles D_1 et D_2 sont sécantes, recherchez les coordonnées du point d'intersection.

(a) Demander que D_1 et D_2 soient sécantes revient à demander qu'elles aient un unique point d'intersection. On a vu que cela se produit lorsque le déterminant du système formé par les équations de D_1 et D_2 est non nul.

Ce déterminant vaut $\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^2 + m$. Or $m^2 + m = 0$ ssi $m = 0$ ou $m = -1$. Les deux droites sont donc sécantes lorsque $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(b) Supposons que $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Les coordonnées du point d'intersection peuvent être calculées avec les formules de Cramer. On a $D_1 \equiv x - my = -m^2$ et $D_2 \equiv x + m^2y = -m$, on en déduit que le point d'intersection est (x_0, y_0) où

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -m^2 & -m \\ -m & m^2 \end{vmatrix}}{m^2 + m} = \frac{-m^4 - m^2}{m^2 + m} = \frac{-m(m^2 + 1)}{m + 1},$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m^2 \\ 1 & -m \end{vmatrix}}{m^2 + m} = \frac{-m + m^2}{m^2 + m} = \frac{m - 1}{m + 1}.$$

Question 8. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2$ est-elle injective, surjective, périodique ? Justifiez vos affirmations.

Remarquons que cette fonction possède comme racines -1 , 1 et 0 . Elle n'est donc pas injective puisque $x_1 := 0 \neq x_2 := 1$ et $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Elle n'est pas non plus périodique vu qu'elle ne possède que trois racines (si elle était périodique, elle devrait avoir soit 0 soit une infinité de racines).

Finalement, elle n'est pas non plus surjective car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -1$ et donc, par exemple, l'équation $f(x) = -2$ ne possède aucune solution (i.e. $-2 \notin \text{Im}(f)$). La borne inférieure¹ sur f se déduit des considérations suivantes :

- si $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, on a $x^4 \geq x^2$ et donc $f(x) \geq 0 \geq -1$;
- si $-1 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq 1$ et donc $f(x) \geq 0 - 1^2 = -1$.

Question 9.

(a) Soient les droites

$$D_1 \equiv (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(-2, 1, 3), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_2 \equiv (x, y, z) = (0, 3, 4) + \mu(-1, 0, 5), \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}.$$

Recherchez, s'il existe, le point d'intersection de ces deux droites.

(b) Soient le plan $\alpha \equiv x - 2y + 3z = \sqrt{2}$ et la droite D dont un système d'équations cartésiennes est $1 + x = 2y + 1 = z/\lambda^2$ où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la droite D est-elle parallèle au plan α ?

(a) On a $D_1 \equiv (x, y, z) = (1 - 2\lambda, -1 + \lambda, 2 + 3\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $D_2 \equiv (x, y, z) = (-\mu, 3, 4 + 5\mu)$ ($\mu \in \mathbb{R}$). Rechercher le point d'intersection revient à savoir si on peut trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(1 - 2\lambda, -1 + \lambda, 2 + 3\lambda) = (-\mu, 3, 4 + 5\mu)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda = -\mu, & (1) \\ -1 + \lambda = 3, & (2) \\ 2 + 3\lambda = 4 + 5\mu. & (3) \end{cases}$$

De (2), on déduit que $\lambda = 4$ et, en remplaçant dans (1), on obtient $\mu = -1 + 2\lambda = 7$. En remplaçant λ par 4 et μ par 7 dans (3), on a $2 + 3\lambda = 14 \neq 4 + 5\mu = 39$. On en déduit que (1), (2) et (3) ne sont pas simultanément vérifiées et donc que les deux droites n'ont aucun point d'intersection.

(b) Un vecteur normal de α est $(1, -2, 3)$. On a $D \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\lambda^2}$ et donc $(1, \frac{1}{2}, \lambda^2)$ est un vecteur directeur de D . La droite D est parallèle au plan α ssi un vecteur normal de α est orthogonal à un vecteur directeur de D , c'est-à-dire $((1, -2, 3) \mid (1, \frac{1}{2}, \lambda^2)) = 0$, c'est-à-dire $1 - 1 + 3\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$. Or $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on ne peut donc pas trouver de valeur pour λ qui fait que D soit parallèle à α .

¹Une analyse plus fine de f permet de déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -1/4$.