Mathématiques Élémentaires

Test n° 6 (18 octobre 2010) Correction

Question 1. *Donnez la table de vérité de $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$.*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0

Question 2. *Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)$ où p et q sont des paramètres réels.*

$$\begin{aligned}
\partial_x\Big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} + \operatorname{arctg}(q/x)\Big) &= \partial_x\big(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}}\big) + \partial_x\big(\operatorname{arctg}(q/x)\big) \\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} \cdot \partial_x \sqrt{x^2+p} + \frac{1}{1+\frac{q^2}{x^2}} \cdot \partial_x\Big(\frac{q}{x}\Big) \\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+p}} + \frac{1}{1+\frac{q^2}{x^2}} \cdot \Big(\frac{-q}{x^2}\Big) \\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+p}} + \frac{x^2}{x^2+q^2} \cdot \Big(\frac{-q}{x^2}\Big) \\
&= \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+p}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+p}} - \frac{q}{x^2+q^2}.
\end{aligned}$$

Question 3. *On considère la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(\ell t) + \sin(\ell t)$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrez que u est solution de l'équation :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \partial_t^2 u(t) = -\ell^2 u(t).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, montrons que $\partial_t^2 u(t) = -\ell^2 u(t)$. On a $\partial_t u(t) = -\ell \sin(lt) + \ell \cos(lt)$. Donc

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u(t) = \partial_t\big(\partial_t u(t)\big) &= \partial_t\big(-\ell \sin(\ell t) + \ell \cos(\ell t)\big) \\
&= -\ell^2 \cos(\ell t) - \ell^2 sin(\ell t) \\
&= -\ell^2 \cdot \big(\cos(\ell t) + \sin(\ell t)\big) \\
&= -\ell^2 u(t).
\end{aligned}$$

Donc u est solution de l'équation donnée.

Question 4. *Donnez, en bon français, la contraposée et la négation de « Si je réussis les tests alors je réussirai l'examen ».*

La phrase donnée est de la forme $A \Rightarrow B$ avec A : « je réussis les tests » et B : « je réussirai l'examen ». La contraposée est $\neg B \Rightarrow \neg A$, c'est-à-dire « si je ne réussis pas l'examen alors je n'ai pas réussi les tests ». La négation est $A \land \neg B$, c'est-à-dire « j'ai réussi les tests et je ne réussis pas l'examen ».

Question 5.

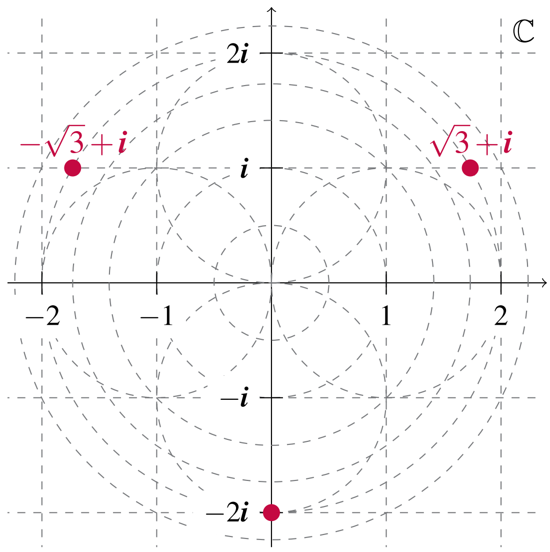
(a) *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = 1$.*

(b) *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\mathrm{e}^{-2t}, \cos(t+\pi)\right)$. Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de f au point $f(0)$.*

(a) On a vu au cours qu'une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = x_0$ est $y = f(x_0) + \partial f(x_0) \cdot (x - x_0)$. Ici $x_0 = 1$, donc $f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0$ et $\partial f(1) = \partial_x(\ln x)|_{x=1} = \frac{1}{x}\big|_{x=1} = 1$. En conclusion, la tangente a pour équation $y = x - 1$.

(b) On a vu au cours qu'une équation paramétrique de la tangente à l'image de f au point $f(x_0)$ est
$$(x, y) = f(x_0) + \lambda \partial f(x_0), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$
Ici $x_0 = 0$, donc $f(0) = (\mathrm{e}^0, \cos\pi) = (1, -1)$ et $\partial f(0) = (-2\,\mathrm{e}^{-2t}, -\sin(t+\pi))|_{t=0} = (-2, 0)$. Une équation paramétrique est donc $(x, y) = (1, -1) + \lambda(-2, 0)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire $x = 1 - 2\lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $y = -1$. Une équation cartésienne de la tangente est donc $y = -1$.

Question 6. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3 = 8\boldsymbol{i}$. Donnez les solutions sous les formes $a+b\boldsymbol{i}$ et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.*



On a $8\boldsymbol{i} = 8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$. Une solution particulière de l'équation est un nombre complexe $z = \rho\cos\theta$ où $\rho^3 = 8$ et $3\theta = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$ est une solution particulière de l'équation. En effet, $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^3 = 2^3\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^3 = 8\operatorname{cis}\frac{3\pi}{6} = 8\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$.
On obtient toutes les solutions de l'équation en multipliant cette solution par les solutions de l'équation $X^3 = 1$, qui sont $1, \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. Les solutions de $X^3 = 8\boldsymbol{i}$ sont donc les nombres complexes :

$$z_0 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\cdot 1 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{3}+\boldsymbol{i}$$
$$z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6} = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = -\sqrt{3}+\boldsymbol{i}$$
$$z_3 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) = 2\cdot\operatorname{cis}\frac{9\pi}{6} = 2\cdot\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -2\boldsymbol{i}$$

Question 7. *Calculez les sommes suivantes :*

- $\displaystyle\sum_{k=-5}^{t}\pi = \sum_{k=-5}^{-1}\pi + \sum_{k=0}^{t}\pi = 5\pi + (t+1)\pi = (t+6)\pi$
- $\displaystyle\sum_{j=3}^{n}(j+n) = \sum_{j=3}^{n} j + \sum_{j=3}^{n} n = \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{2} j + \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{2} n = \frac{n(n+1)}{2} - 3 + (n+1)n - 3n$
  $\displaystyle= \frac{n(n+1)}{2} - 3 + n^2 - 2n = \frac{n^2+n-6+2n^2-4n}{2} = \frac{3n^2-3n-6}{2}$

Question 8. *Calculez les intégrales définies suivantes :*

(a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ *(aide : poser $x = 2\sin\theta$)*

(a) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{-2} - \frac{\mathrm{e}^{0}}{-2} = -\frac{1}{2\,\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2}$

(b) $\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{\ln^2 3}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}$

(c) Posons $x = 2\sin\theta$, on a donc $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Lorsque x varie de 0 à 2, θ varie de 0 à $\pi/2$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{car } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1) \\
&= \int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \quad (\text{on a} \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta \text{ car } \cos\theta \geqslant 0 \text{ puisque } \theta \text{ varie de 0 à } \frac{\pi}{2}) \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,\mathrm{d}\theta \quad (\text{car } \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1) \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \big(\cos(2\theta)+1\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\Big(\frac{\sin(2\theta)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= 2\cdot 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Question 9. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des paramètres réels. Pour quelle(s) valeur(s) de a, b, c le graphe de f passe-t-il par les points $(1,4)$, $(2,15)$ et $(3,40)$? Expliquez votre raisonnement et détaillez vos calculs.*

Demander que le graphe de f passe par ces trois points revient à dire que $f(1) = 4$, $f(2) = 15$ et $f(3) = 40$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 4 \\ 8 + 4a + 2b + c = 15 \\ 27 + 9a + 3b + c = 40 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right)$$

Échelonnons cette matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right) \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right) \quad (L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2)$$

La troisième ligne dit que $c = 1$.
La deuxième ligne dit que $b + \frac{3}{2}c = \frac{5}{2}$. Donc $b = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.
La troisième ligne dit que $a + b + c = 3$. Donc $a = 3 - b - c = 1$.
Le graphe de f passe donc par les trois points donnés si $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

Question 10. *Montrez, par récurrence, que pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & n.a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

<u>Cas de base : $n = 0$.</u>
Le premier membre est

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le deuxième membre est

$$\begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux membres sont donc égaux.
<u>Hypothèse de récurrence :</u> on suppose que la propriété est vérifiée pour tout $n \leq k$, avec $k \geqslant 0$. En particulier, pour $n = k$, on a

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & k.a^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.$$

Montrons que la propriété est vraie pour $n = k+1$, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1).a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} && \text{(règle sur les exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \begin{pmatrix} a^k a + 0 & a^k + ka^{k-1}a \\ 0+0 & 0 + a^k a \end{pmatrix} && \text{(déf. du produit matriciel)} \\
&= \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.