Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x^2+\alpha x+1}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α la tangente au graphe de f en $x = 0$ passe-t-elle par le point $(1,1)$? Expliquez votre démarche. $/4$

Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2.

/5

- Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est antisymétrique ».

- Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = i^{42} - j^{42}$. Montrez que M est une matrice antisymétrique.

- Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^{42} - j^{42})$. Expliquez votre démarche.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. /8

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right)(1-t) = 1 - t^{n+1}.$$

(b) La preuve que vous avez donnée au point précédent est-elle valable pour $t \in \mathbb{C}$? Et pour t une matrice 3×3 ? Justifiez votre réponse.

(c) Soit $\operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$, où $n \neq 0$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$. Expliquez votre démarche.

Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 4. Calculez $\sum_{j=1}^{41}(1+\boldsymbol{i})^j$ où $\boldsymbol{i}^2=-1$. $/3$

Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit le système

/8

$$\begin{cases} -x+y+\lambda z = 1 \\ x+\lambda y - z = 1 \\ \lambda x + y - z = 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = 2$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

(c) En utilisant le point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système pour $\lambda = 2$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3})$. /5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1}. Expliquez votre démarche.