Mathématiques Élémentaires

Test n° 7 (25 octobre 2010) **Correction**

Question 1. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α la tangente au graphe de f en $x = 0$ passe-t-elle par le point $(1,1)$? Expliquez votre démarche.*

Une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en $x = 0$ est $y = f(0) + \partial_x f(0) \cdot (x - 0)$. On a $f(0) = \mathrm{e}^{0+0+1} = \mathrm{e}$ et

$$\begin{aligned} \partial_x f(0) &= \partial_x \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}\big|_{x=0} \\ &= \mathrm{e}^{x^2+\alpha x+1}\big|_{x=0} \cdot \partial_x(x^2+\alpha x+1)\big|_{x=0} \\ &= \mathrm{e} \cdot (2x+\alpha)\big|_{x=0} \\ &= \alpha\,\mathrm{e} \end{aligned}$$

La tangente T a donc pour équation $y = \mathrm{e} + \alpha\,\mathrm{e}\,x$. On veut que T passe par $(1,1)$. En remplaçant x et y par 1 dans l'équation de T, on a $1 = \mathrm{e} + \alpha\,\mathrm{e}$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.
En conclusion, la tangente passe par $(1,1)$ ssi $\alpha = \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.

Question 2.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « A est antisymétrique ».*

(b) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par $M_{ij} = i^{42} - j^{42}$. Montrez que M est une matrice antisymétrique.*

(c) *Utilisez le point précédent pour calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^{42} - j^{42})$. Expliquez votre démarche.*

(a) A est antisymétrique si $A^t = -A$.

(b) Soient $i, j \in \{1,\ldots,n\}$. On doit montrer que $M^t_{ij} = -M_{ij}$ c'est-à-dire $M_{ji} = -M_{ij}$. Or,

$$M_{ji} = j^{42} - i^{42} = -(i^{42} - j^{42}) = -M_{ij}.$$

Donc, M est antisymétrique.

(c) On doit calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}$. On a vu au cours que calculer cette double somme revient à additionner tous les éléments de la matrice M. Comme M est antisymétrique, on a que pour tout $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, $M_{ij} = -M_{ji}$ (c'est l'objet du point précédent) et $M_{ii} = 0$. La double somme vaut donc 0.

Question 3.

(a) *Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrez, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right)(1-t) = 1 - t^{n+1}.$$

(b) *La preuve que vous avez donnée au point précédent est-elle valable pour $t \in \mathbb{C}$? Et pour t une matrice 3×3 ? Justifiez votre réponse.*

(c) *Soit $\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$, où $n \neq 0$. Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$. Expliquez votre démarche.*

(a) Cas de base : $n = 0$. Le premier membre vaut alors $\left(\sum_{k=0}^{0} t^k\right)(1-t) = t^0(1-t) = 1-t$ tandis que le second membre vaut $1 - t^{0+1} = 1 - t$. Les deux membres sont donc égaux.

Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété soit vérifiée pour tout $n \leqslant \ell$ où $\ell \geqslant 0$. Montrons qu'elle est encore vérifiée pour $n = \ell + 1$. On doit montrer que $\left(\sum_{k=0}^{\ell+1} t^k\right)(1-t) = 1 - t^{\ell+2}$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\ell+1} t^k\right)(1-t) &= \left(\sum_{k=0}^{\ell} t^k + t^{\ell+1}\right)(1-t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\ell} t^k\right)(1-t) + t^{\ell+1}(1-t) \quad \text{(en distribuant)} \\
&= 1 - t^{\ell+1} + t^{\ell+1} - t^{\ell+2} \quad \text{(par hypothèse de récurrence et en distribuant)} \\
&= 1 - t^{\ell+2}
\end{aligned}$$

(b) La preuve donnée au point précédent n'utilise que les propriétés de l'addition et des puissances d'un élément. Elle est donc valable pour $t \in \mathbb{C}$. Comme on n'utilise pas non plus la commutativité de la multiplication, la preuve est aussi valable pour $t \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}\right)^k$ par la formule de De Moivre. On déduit de (a) que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \left(\operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}\right)^k &= \frac{1 - \left(\operatorname{cis}(\frac{2\pi}{n})\right)^n}{1 - \operatorname{cis}(\frac{2\pi}{n})} \\
&= \frac{1 - \operatorname{cis} 2\pi}{1 - \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} \\
&= \frac{0}{1 - \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Question 4. *Calculez* $\sum_{j=1}^{41}(1+\boldsymbol{i})^j$ *où* $\boldsymbol{i}^2=-1$.

On a $1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. Donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{41}(1+\boldsymbol{i})^j &= \sum_{j=0}^{41}(\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^j-1 \\
&= \frac{1-(\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^{42}}{1-\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}-1 && \text{(par la question 3)} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}^{42}\operatorname{cis}\frac{42\pi}{4}}{1-(1+\boldsymbol{i})}-1 && \text{(par la formule de De Moivre)} \\
&= \frac{1-2^{21}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}{-\boldsymbol{i}}-1 \\
&= \frac{1-2^{21}\cdot\boldsymbol{i}}{-\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}}-1 \\
&= \boldsymbol{i}-2^{21}\cdot\boldsymbol{i}^2-1 \\
&= 2^{21}-1+\boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

Question 5. *Soit le système*

$$
\begin{cases}
-x+y+\lambda z=1\\
x+\lambda y-z=1\\
\lambda x+y-z=1
\end{cases}
$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ? Expliquez votre démarche.*

(b) *Soit $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda=2$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(c) *En utilisant le point précédent, donnez l'ensemble des solutions du système pour $\lambda=2$.*

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système, c'est-à-dire $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Le système a une solution unique ssi dét$A \neq 0$. Or

$$\begin{aligned} \text{dét}A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(-\lambda+1) - 1(-1-\lambda) + \lambda(-1-\lambda^2) \\ &= \lambda - 1 + 1 + \lambda - \lambda - \lambda^3 \\ &= -\lambda^3 + \lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 1) \end{aligned}$$

Donc dét$A \neq 0$ ssi $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Le système a donc une solution unique ssi $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.

(b) On sait que A^{-1} existe ssi dét$A \neq 0$. Or, par (a), si $\lambda = 2$ alors dét$A \neq 0$. Calculons A^{-1} par la méthode de la matrice compagnon. On a :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2/3,\ L_3 \leftarrow L_3/2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3/3 \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 5/6 \\ 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(c) Si $\lambda = 2$, le système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant à gauche par A^{-1} des deux côtés, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Question 6. *Soient les nombres complexes* $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3})$ *et* $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3})$.

(a) *Donnez la forme trigonométrique de* z_1 *et* z_2.

(b) *Soit la matrice* $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *définie par*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ *et déduisez-en la matrice* M^{-1}. *Expliquez votre démarche.*

Voir correction du test 6 du 19 octobre 2009, question 4.