Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2011)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /4

- Prouvez que $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 3 \neq 0$.

- Donnez la forme trigonométrique de $-a + bi$ sachant que celle de $a + bi$ est $\rho_0 \operatorname{cis} \theta_0$ avec $\theta_0 \in [0, \pi/4]$. Indication : faites un dessin.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Soit la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. /5

(a) Définissez « A^{-1} est l'inverse de A ».

(b) Supposons que $\text{dét} A \neq 0$. En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét} A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t$$

(c) Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch} x & \text{sh} x \\ \text{sh} x & \text{ch} x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. Pour rappel, $\text{ch} x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ et $\text{sh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 3. Soient les matrices A et B définies par /3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Calculez $\det A$ et $\det B$.

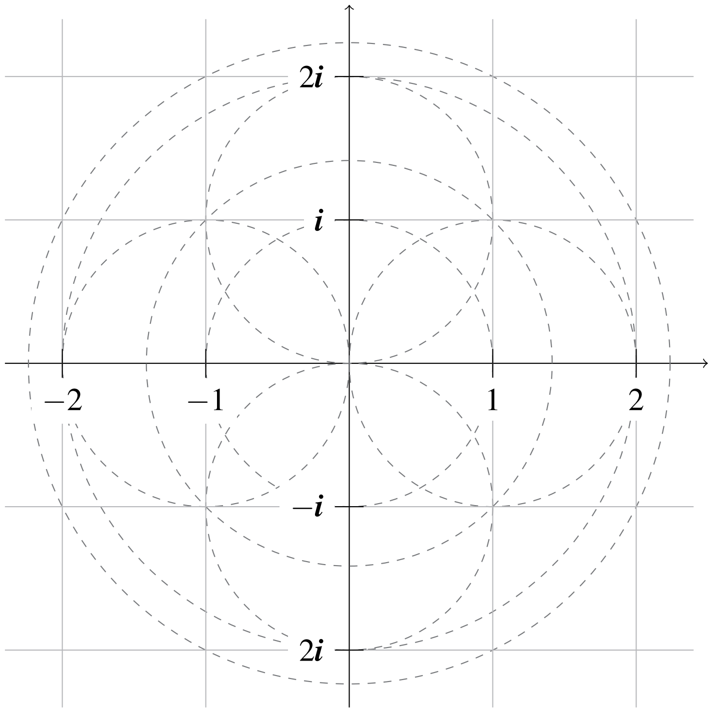
Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

/6

Question 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = 8$. Donnez les solutions sous les formes $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.

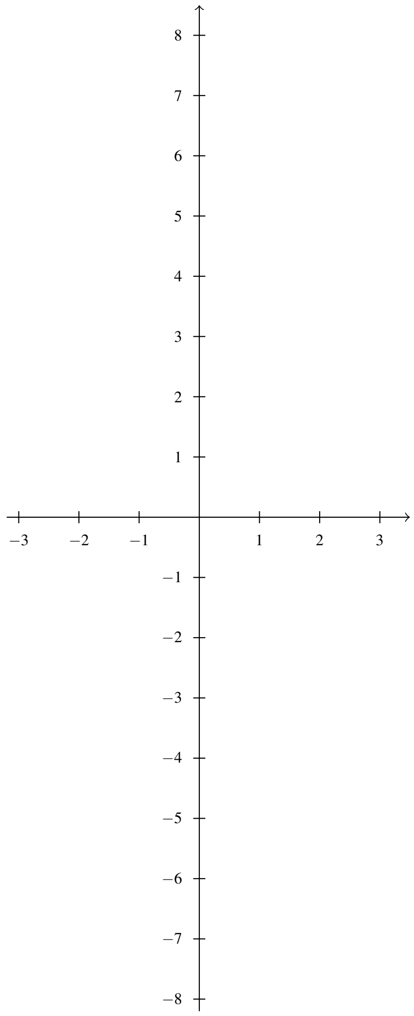


Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 2x^2$. Expliquez votre démarche (vous pouvez calculer la valeur de f en maximum deux points). /3



Question 6. Donnez toutes les solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{tg}(1/x) = 1$. /3

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soient les matrices $S, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définies par /3

$$S_{ij} = j - i \qquad \text{et} \qquad B_{ij} = i + j.$$

Considérons la matrice C définie par $C = SB$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Déterminez la ou les valeurs du paramètre réel a afin que la tangente à l'image de la fonction /4

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \left(\frac{\sqrt[4]{1+x}}{1+ax},\ \operatorname{arctg} e^{ax^2+a^2x} \right)$$

en $f(0)$ soit parallèle à la droite D d'équation $x+y+10=0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Calculez les intégrales suivantes : /4

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$

Question 10. Calculer /4

- $\overline{2-\boldsymbol{i}} =$

- $\overline{3\boldsymbol{i}-5} =$

- $|(1-\boldsymbol{i})^{10}| =$

- $|(2-\boldsymbol{i})(\overline{3\boldsymbol{i}-5})| =$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 11. On considère les trois plans α, β et γ d'équations /4

$$\alpha \equiv \lambda x + y - z = 1$$
$$\beta \equiv x + \lambda y - z = 1$$
$$\gamma \equiv -x + y + \lambda z = 1$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les trois plans possèdent-ils un unique point d'intersection ? Expliquez votre raisonnement.

(b) Pour la ou les valeurs trouvées au point (a), recherchez les points d'intersection des trois plans. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Question 12. /4

- Donnez la table de vérité de $\big((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow T\big) \wedge P$.

- Soit a et x deux réels. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de $x - a$ est plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $x = a$ ».

Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2011)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 13. Calculez

/6

- $\sum_{t=-k}^{k}(t+1) =$

- $\sum_{k=2}^{\ell}(2+k^2) =$

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i =$

- $\partial_t\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{t^i}{n+1-i}\right) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x-2y+5z=3$ et contenant la droite D passant par le point $(2,1,1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1,2,1)$. /4