Mathématique Élémentaire

Examen (31 octobre 2011) Correction

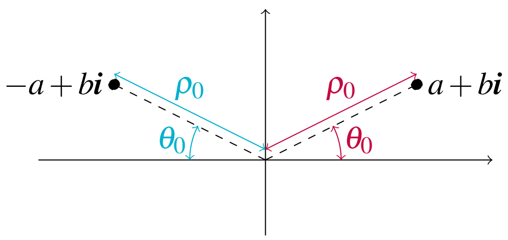
Question 1.

- *Prouvez que* $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 3 \neq 0$.

  Clairement, vu que $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 3\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \boldsymbol{i}3\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, on a que les parties imaginaires de $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 3$ sont identiques et égales à $3\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. Puisque $\frac{11\pi}{12}$ est différent de 0 et π et $0 \leqslant \frac{11\pi}{12} < 2\pi$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \neq 0$. Donc, $z \neq 0$.

- *Donnez la forme trigonométrique de* $-a + b\boldsymbol{i}$ *sachant que celle de* $a + b\boldsymbol{i}$ *est* $\rho_0 \operatorname{cis}\theta_0$ *avec* $\theta_0 \in [0, \pi/4]$. *Indication : faites un dessin.*

  Il s'ensuit que $-a + b\boldsymbol{i}$, appartient au deuxième quadrant et est d'argument $\pi - \theta_0$ $\big($car $\pi - \theta_0 \in [0, \pi[\big)$ et de même module. Donc $-a + b\boldsymbol{i} = \rho_0 \operatorname{cis}(\pi - \theta_0)$.



Question 2. *Soit la matrice* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *où* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) *Définissez « A^{-1} est l'inverse de A ».*

A^{-1} est l'inverse de A si $A \cdot A^{-1} = \mathrm{Id} = A^{-1} \cdot A$.

(b) *Supposons que* $\text{dét}\, A \neq 0$. *En utilisant la définition donnée au point précédent, montrez que*

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t$$

On a :

$$\begin{aligned}
A^{-1}\cdot A &= \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} && \text{par définition de la réciproque} \\
&= \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{pmatrix} && \text{par définition du produit matriciel} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} && \text{car dét}A = ad-bc \\
&= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} && \text{par définition de la multiplication d'une matrice par un réel} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On montre que $A\cdot A^{-1} = \text{Id}$ par un calcul tout à fait analogue.

(c) *Calculez, s'il existe, l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$$

où $x \in \mathbb{R}$. *Pour rappel,* $\operatorname{ch} x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ *et* $\operatorname{sh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.

Par le point (b), on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}A}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}^t.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\text{dét}A = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{4} - \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 2\cdot \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}\cdot 4\cdot \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = 1.
\end{aligned}$$

Donc, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$.

Question 3. *Soient les matrices A et B définies par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Calculez dét A et dét B.

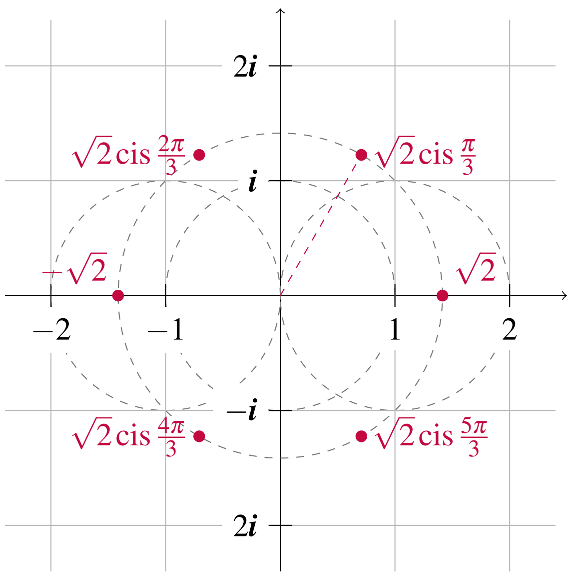
$$\text{dét} A = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-6) = 24.$$

$$\begin{aligned} \text{dét} B &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta\gamma & \gamma(\alpha-\beta) & \beta(\alpha-\gamma) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\ &= (\beta-\alpha)\cdot(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta\gamma & -\gamma & -\beta \end{vmatrix} \\ &= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-\beta+\gamma) = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta). \end{aligned}$$

Question 4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = 8$. Donnez les solutions sous les formes $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, et trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe.*

Une solution particulière de $X^6 = 8$ est $\sqrt{2}$. En effet, $(\sqrt{2})^6 = \left((\sqrt{2})^2\right)^3 = 2^3 = 8$. Par conséquent (vu au cours) les solutions dans $\mathbb{C}$ de $X^6 = 8$ sont les complexes $\sqrt{2} \cdot u$ avec $u^6 = 1$. Plus explicitement, sous forme trigonométrique, les solutions sont

- $\sqrt{2}$,
- $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$,
- $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$,
- $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\pi$,
- $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$,
- $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}$.



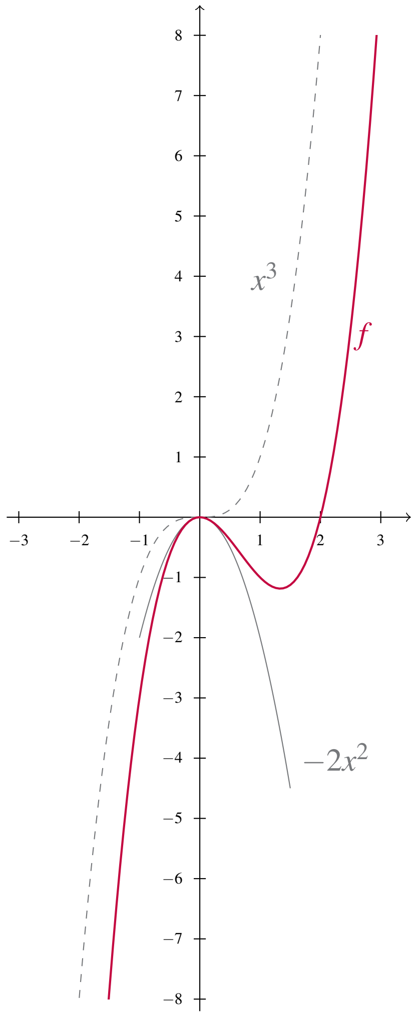
Sous forme $a + b\boldsymbol{i}$, en tenant compte des valeurs de cis $\frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, \dots, 5\}$, on obtient :

- $\sqrt{2}$,
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$,
- $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$,
- $-\sqrt{2}$,
- $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$,
- $\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Question 5. *Esquissez le graphe de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 2x^2$. *Expliquez votre démarche (vous pouvez calculer la valeur de* f *en maximum deux points).*

Constatons que $f(0) = 0$ et $f(2) = 0$ et que ce sont les deux seules valeurs de x telles que $f(x) = 0$. Lorsque $x \approx 0$, x^3 est très petit par rapport à x^2 et donc $f(x) \approx -2x^2$. Lorsque $|x|$ est grand, c'est x^3 qui domine x^2 et, dès lors, $f(x) \approx x^3$. En joignant les morceaux de graphes ainsi esquissés, on trouve un tracé qui ressemble au graphe de droite.

REMARQUE : Cette fonction n'est ni paire, ni impaire.



Question 6. *Donnez toutes les solutions* $x \in \mathbb{R}$ *de l'équation* $\mathrm{tg}(1/x) = 1$.

Rappelons nous d'abord que $\mathrm{tg}\,\theta = 1$ si et seulement si $\theta = \pi/4 + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (on peut le constater aisément sur un dessin du cercle trigonométrique). Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}(1/x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{pour un } k \in \mathbb{Z}, \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)^{-1} = \frac{4}{(1+4k)\pi}, \quad \text{pour un } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Question 7. *Soient les matrices $S, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définies par*

$$S_{ij} = j - i \qquad et \qquad B_{ij} = i + j.$$

Considérons la matrice C définie par $C = SB$. Calculez $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.

Par définition du produit matriciel, on a $C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik}B_{ki}$. Donc,

$$\begin{aligned}
C_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} (k-i)(i+k) && \text{par définition de } S \text{ et } B\\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2 - i^2) && \text{en distribuant}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} i^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - ni^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - ni^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n\cdot n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Question 8. *Déterminez la ou les valeurs du paramètre réel a afin que la tangente à l'image de la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \left(\frac{\sqrt[4]{1+x}}{1+ax},\ \operatorname{arctg} e^{ax^2+a^2x}\right)$$

en $f(0)$ soit parallèle à la droite D d'équation $x + y + 10 = 0$.

Un vecteur *normal* à la droite D se lit sur l'équation de cette dernière : il s'agit de $(1,1)$. Par ailleurs un vecteur directeur de la tangente en $f(0)$ est $\partial f(0)$. Dès lors, la tangente sera parallèle à D si et seulement si $\partial f(0) \perp (1,1)$, c'est-à-dire si et seulement si $\bigl(\partial f(0) \bigm| (1,1)\bigr) = 0$. Les règles de calcul des dérivées impliquent

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x) &= \Bigl(\partial_x \frac{\sqrt[4]{1+x}}{1+ax},\ \partial_x \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{ax^2+a^2x}\Bigr) \\
&= \Bigl(\frac{\partial_x(1+x)^{1/4}(1+ax) - \sqrt[4]{1+x}\,\partial_x(1+ax)}{(1+ax)^2}, \\
&\qquad \partial_w \operatorname{arctg} w\big|_{w=\mathrm{e}^{ax^2+a^2x}}\, \partial_z \mathrm{e}^z\big|_{z=ax^2+a^2x}\, \partial_x(ax^2+a^2x)\Bigr) \\
&= \Bigl(\frac{\frac{1}{4}(1+x)^{-3/4}(1+ax) - a\sqrt[4]{1+x})}{(1+ax)^2},\ \frac{\mathrm{e}^{ax^2+a^2x}\,(2ax+a^2)}{1+(\mathrm{e}^{ax^2+a^2x})^2}\Bigr)
\end{aligned}$$

En évaluant en $x = 0$, on trouve

$$\partial_x f(0) = (\tfrac{1}{4} - a, \tfrac{1}{2}a^2).$$

Dès lors $\bigl(\partial f(0) \bigm| (1,1)\bigr) = \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{4}$. Ce produit scalaire s'annule si et seulement si $a = 1 + 1/\sqrt{2}$ ou $a = 1 - 1/\sqrt{2}$ — qui sont dont les deux valeurs de a qui répondent à la question.

Question 9. *Calculez les intégrales suivantes :*

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Intégrand de la forme } u(x)\,\partial_x u(x)\text{)} \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\Big]_0^1 = 2(\mathrm{e}-1)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Changement de variable } y = \sqrt{x} \text{ i.e., } x = y^2\text{)} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,2y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2y}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{2(1+y)-2}{1+y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Formellement : division euclidienne)} \\
&= \int_0^1 2 - \frac{2}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2\,\mathrm{d}y - 2\int_0^1 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = 2 - 2\Bigl[\ln|1+y|\Bigr]_0^1 = 2 - 2\ln 2\end{aligned}$$

Question 10. *Calculer*

- $\overline{2-\boldsymbol{i}} = 2+\boldsymbol{i}$.
- $\overline{3\boldsymbol{i}-5} = \overline{-5+3\boldsymbol{i}} = -5-3\boldsymbol{i}$.
- $|(1-\boldsymbol{i})^{10}| = |1-\boldsymbol{i}|^{10} = \bigl(\sqrt{1^2+(-1)^2}\bigr)^{10} = 2^5 = 32$.
- $|(2-\boldsymbol{i})(\overline{3\boldsymbol{i}-5})| = |2-\boldsymbol{i}|\,|\overline{3\boldsymbol{i}-5}| = \sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{5}\sqrt{34}$.

Question 11. *On considère les trois plans α, β et γ d'équations*

$$\alpha \equiv \lambda x + y - z = 1$$
$$\beta \equiv x + \lambda y - z = 1$$
$$\gamma \equiv -x + y + \lambda z = 1$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Pour quelle(s) valeur(s) de λ les trois plans possèdent-ils un unique point d'intersection ? Expliquez votre raisonnement.*

Considérons le système formé par les équations des trois plans :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ -x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

Les trois plans ont un unique point d'intersection ssi ce système possède un unique solution, ce qui revient à demander que le déterminant de la matrice des coefficients du système soit non nul. Ce déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 - 1 - (\lambda - \lambda + \lambda) \qquad \text{(par Sarrus)}$$
$$= \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Par conséquent, les trois plans ont un unique point d'intersection ssi $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

(b) *Pour la ou les valeurs trouvées au point (a), recherchez les points d'intersection des trois plans. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. On sait qu'il y a un unique point d'intersection par (a). Utilisons les formules de Cramer pour le trouver. On a,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 - 1 - 1 + \lambda + 1 - \lambda}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{(\lambda^2 - 1)}{\lambda(\lambda^2 - 1)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 + 1 - 1 - 1 + \lambda - \lambda}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 - 1 + 1 + \lambda - \lambda - 1}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Le point d'intersection recherché est $(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$.

Question 12.

- *Donnez la table de vérité de* $\big((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow T\big) \wedge P$.

P	Q	T	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow T$	$\big((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow T\big) \wedge P$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

- *Soit a et x deux réels. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de $x - a$ est plus petite que tous les réels de la forme $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $x = a$ ».*

  Si $x = a$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la valeur absolue de $x - a$ est strictement plus grande que $1/2^n$.

Question 13. *Calculez*

- $\sum_{t=-k}^{k}(t+1) = \sum_{t=-k}^{k} t + \sum_{t=-k}^{k} 1 = \sum_{t=-k}^{0} t + \sum_{t=0}^{k} t + 2k + 1 = \sum_{t=0}^{k} -t + \sum_{t=0}^{k} t + 2k + 1 = 2k+1.$

- $\sum_{k=2}^{\ell}(2+k^2) = \sum_{k=2}^{\ell} 2 + \sum_{k=2}^{\ell} k^2$

$$= 2(\ell-1) + \sum_{k=2}^{\ell} k^2 = 2(\ell-1) + \sum_{k=1}^{\ell} k^2 - \sum_{k=1}^{1} k^2 = 2(\ell-1) + \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6} - 1^2.$$

- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^i 1^{n-i} = (t+1)^n.$

- $\partial_t\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{t^i}{n+1-i}\right) =$

  On utilise ici le fait que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées des termes de la somme. Cela donne :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\partial_t \frac{t^i}{n+1-i}\right).$$

  Le premier terme de la somme est $\binom{n}{0}\left(\partial_t \frac{t^0}{n+1-0}\right) = 0$. Pour $i \in \{1, \ldots n\}$, on a $\partial_t \frac{t^i}{n+1-i} = \frac{i t^{i-1}}{n+1-i}$.

On se ramène donc au calcul de la somme suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\partial_t\frac{t^i}{n+1-i}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{it^{i-1}}{n+1-i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{it^{i-1}}{n-i+1}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!}\cdot t^{i-1}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}\cdot t^{i-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot t^{i}\\
&= (t+1)^{n-1} \quad \text{par le point précédent.}
\end{aligned}$$

Question 14. *Donnez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire au plan β d'équation $x-2y+5z=3$ et contenant la droite D passant par le point $(2,1,1)$ et dont un vecteur directeur est $(-1,2,1)$.*

Une équation cartésienne du plan α est de la forme $ax+by+cz=d$ où (a,b,c) est un vecteur normal.

Un vecteur normal du plan β est $(1,-2,5)$. Comme α et β sont perpendiculaires, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. On a donc $((a,b,c)|(1,-2,5))=0$, c'est-à-dire

$$a-2b+5c=0. \tag{1}$$

Puisque la droite D est contenue dans le plan α, le point $(2,1,1)$ qui appartient à D appartient aussi à α. En remplaçant x par 2 et y et z par 1 dans l'équation de α, on a :

$$2a+b+c=d. \tag{2}$$

Un vecteur directeur de D est $(-1,2,1)$. Ce vecteur sera orthogonal à (a,b,c). On a donc l'équation suivante :

$$-a+2b+c=0. \tag{3}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système formé par les équations (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} a-2b+5c=0\\ 2a+b+c=d\\ -a+2b+c=0\end{cases}$$

En faisant $(1)+(3)$, on a : $c=0$. En faisant $(2)-2\cdot(1)$, on a $5b=d$, c'est-à-dire $b=\frac{d}{5}$. En remplaçant dans (1), on a : $a=2b=\frac{2d}{5}$. Donc, en prenant $d=5$, on a $a=2$ et $b=1$. En conclusion,

$$\alpha \equiv 2x+y=5.$$