Mathématique Élémentaire

Examen (19 janvier 2012)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les sommes suivantes : /4

- $\displaystyle\sum_{i=-3}^{100} (i+1) =$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=i}^{\ell}(i+j) =$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{42} \binom{42}{k} =$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. /4

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnez la contraposée de la phrase suivante : « Si la valeur absolue de x est inférieure à tout réel strictement positif, alors $x = 0$ ».

Question 3. Donnez la forme trigonométrique de $-a - b\boldsymbol{i}$ sachant que celle de $a + b\boldsymbol{i}$ est $\rho \operatorname{cis} \theta$ avec $\theta \in [0, \pi/3]$. Indication : faites un dessin. /2

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Déterminez la ou les valeurs du paramètre réel μ afin que la tangente à l'image de la fonction /5

$$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\mathrm{e}^{\arcsin(t^2+\mu t)}, \frac{1}{(1+t)^{\mu+1}}\right)$$

en $f(0)$ soit perpendiculaire à la droite d'équation $x+y=42$.

Question 5. Calculez : /4

- $\left|(3+\boldsymbol{i})(2+\boldsymbol{i})^{-1}\right| =$
- $\overline{\boldsymbol{i}+1} =$
- $\left|\left(\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right| =$
- la partie réelle et la partie imaginaire de $z := \dfrac{1+\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Calculez : /4

(a) $\partial_x \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t =$

(b) $\int_0^1 \ln\bigl(1+\sqrt{x}\bigr)\,\mathrm{d}x =$

Question 7. Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par /4

$$M_{ij} = (i-j)^3 + \delta_{ij} \qquad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

/6

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Prouvez par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k} t^{\ell}\right)(1-t) = 1 - t^{k+1}.$$

(b) Déduisez du point précédent la valeur du $\sum_{\ell=0}^{4n} \boldsymbol{i}^{\ell}$ où $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soient les matrices

/5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} x & xy & y \\ 0 & 0 & x \\ y & 0 & y \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} z & 0 & zx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

Calculez BA, $\text{dét}\, C$, $\text{dét}(DE)$.

Nom :

Prénom :

Section :

/4

Question 10. Soient le plan $\alpha \equiv 4x - z = 1 - 2y$ et le point P de coordonnées $(0, -2, 3)$.

(a) Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point P et perpendiculaire au plan α.

(b) Déterminez le point d'intersection entre la droite D et le plan α.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11.

/6

(a) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

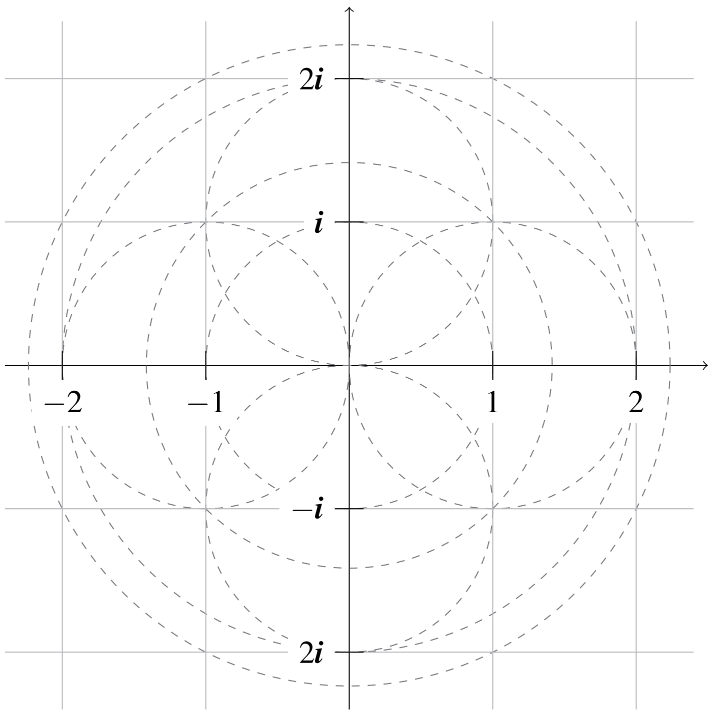
(c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 + 8 = 0$. Donnez les solutions sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, ainsi que sous la forme trigonométrique. Représentez ces solutions dans le plan complexe. /6



Nom :

Prénom :

Section :

/7

Question 13. Soit le système

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.