Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /5

(a) $\sum_{s=1}^{v}(3+s^2) =$

(b) $\sum_{v=1}^{m}\sum_{u=1}^{m}\left(m^2-(u-v)^2\right) =$

(c) $\partial_x \sum_{i=0}^{n} x^i \Big|_{x=1} =$

(d) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2.

/4

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors $1+\sqrt{2}$ est rationnel ».

Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. /4

- Prouvez que $3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) - 3 \neq 0$.

- Donnez la forme trigonométrique de $-a+b\boldsymbol{i}$ sachant que celle de $a+b\boldsymbol{i}$ est $\rho_0 \operatorname{cis}\theta_0$ avec $\theta_0 \in [0, \pi/4]$. Indication : faites un dessin.

Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. Calculez et exprimez le résultat final sous forme trigonométrique. /3

- $\overline{1 - \boldsymbol{i}} =$

- $(3 - 3\boldsymbol{i})^{-1} =$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

Question 5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+1)$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant f(n+k)$. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soient les matrices

/4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ ab & 0 & 0 \\ b & a & b \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ca & b & c^2 \end{pmatrix}.$$

Calculez BA, $\det C$ et $\det(CED)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Quel est l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux aux droites D_1 et D_2 définies par /5

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y+2}{-3} = \frac{-z+2}{-1}$$
$$D_2 \equiv (x, y, z) = (3\lambda + 1, -\lambda - 2, 5 + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Décrivez géométriquement l'ensemble obtenu.

Question 8. Calculez : /4

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x =$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit un système de deux équations à deux inconnues /6

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Considérons $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice des coefficients du système. Supposons que $\text{dét} A \neq 0$.

(a) Montrez que $A^{-1} = \frac{1}{\text{dét} A} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix}$.

(b) Montrez que l'unique solution du système est $\left(\dfrac{\text{dét} A_1}{\text{dét} A}, \dfrac{\text{dét} A_2}{\text{dét} A}\right)$ où, pour $j = 1, 2$, A_j est la matrice A dans laquelle on a remplacé la j^{e} colonne par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

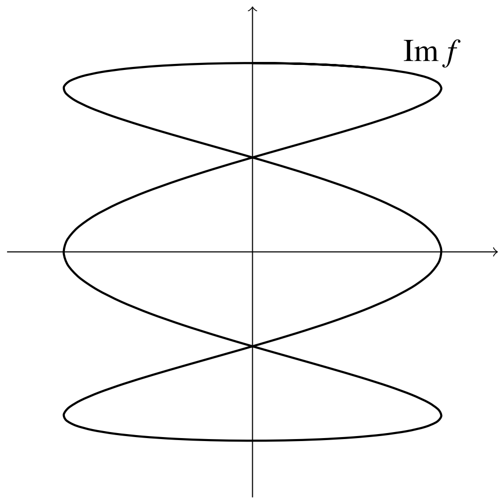
Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin(3t), \cos t\big)$ dont l'image est représentée ci-dessous. Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de f au point $f(\pi/3)$. Représentez cette tangente sur le graphique. Le résultat est-il celui attendu ? Expliquez.



Nom :

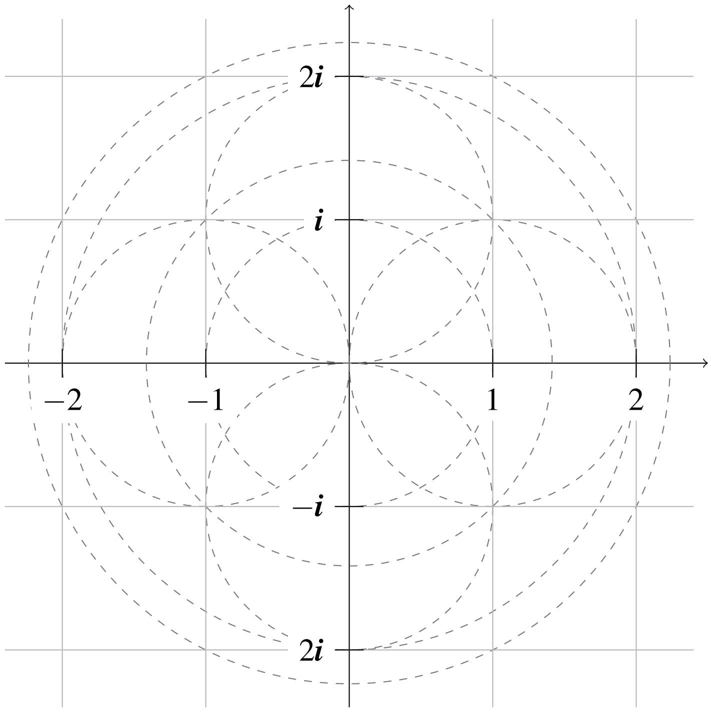
Prénom :

Section :

Question 11. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de l'équation /4

$$X^3 + 1 = 0 \tag{1}$$

Représentez ces solutions sur le graphe ci-dessous. Justifiez vos calculs.



Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Soit le système /7

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de M pour $\lambda = 3$.

(c) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le(s) cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, et PRÉNOM sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.

  En tant qu'enseignant ou futur enseignant, votre rédaction doit être particulièrement soignée (pensez aux élèves).
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Partie spécifique aux étudiants de l'agrégation.

Question 1.

/10

- Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Définissez en ε-δ la notion « f est continue en a ».

- Prouvez que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$ est continue en 0 en montrant que la définition ci-dessus est vérifiée. La qualité de votre rédaction est importante.

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

Question 1 (suite).

- Prouvez que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0 en montrant que la définition ci-dessus n'est pas vérifiée. La qualité de votre rédaction est importante.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 2. Cochez la case adéquate selon que vous pensez que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses par une preuve succincte ou un contre-exemple explicite. /7

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\max[0,1[= 1$

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sqrt{4} = \pm 2$ car l'équation $x^2 = 4$ a pour solutions $+2$ et -2.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\partial f(x) = 0$, alors x est un minimum local ou un maximum local de f.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une fonction dérivable est continue mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Mathématique Élémentaire

Examen (11 juin 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	Agrég math & phys

/7

Question 3. Pour montrer que la proposition

$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant \rho \tag{1}$$

est fausse pour l'ensemble $A =]1, +\infty[$, un étudiant tient le raisonnement suivant :

> Prenons $\rho = 10$. On n'a pas que $\forall x \in A,\ x \leqslant 10$. En effet, en considérant $x = 11$, qui est un élément de A, on aurait $11 \leqslant 10$. Cette contradiction montre que (1) est faux.

Ce raisonnement est-il correct ? Expliquez.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (pas nécessairement continue, ni inversible). Si I est un ensemble d'indices et, pour chaque $i \in I$, A_i est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, prouvez que /3

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

RAPPEL : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on définit $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$.

Question 5. Un de vos élèves, Jack Dongerra, se demande pourquoi on ne peut pas faire z^w avec $z, w \in \mathbb{C}$. En effet, dit-il, on a commencé par définir, pour $n \in \mathbb{N}$, $z^n = z \cdots z$ (n fois), ensuite $z^{-n} = 1/z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), puis $z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) et enfin $z^r = \lim_{p/q \to r} z^{p/q}$. Que lui répondez-vous ? /3

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

/5

Question 6. À la question « Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$ une fonction différentiable et inversible telle que son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto f^{-1}(s)$ soit aussi différentiable. Donnez et prouvez une formule qui exprime $\partial_s f^{-1}(s)$ en fonction de $\partial_t f(t)$ pour un t bien choisi. », un étudiant donne la réponse suivante :

> *On prend un $a \in \mathbb{R}$. On a*
>
> $$\begin{aligned} f(a)f^{-1}(a) = a &\Leftrightarrow \partial\big(f(a)f^{-1}(a)\big) = \partial a \\ &\Leftrightarrow f'(a)f^{-1}(a) + f^{-1'}(a)f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial f^{-1}(a) = \frac{-\partial f(a) f^{-1}(a)}{f(a)} \\ &\Leftrightarrow \partial f^{-1}(s) = \frac{-\partial f(t) f^{-1}(s)}{f(t)} \end{aligned}$$

Pensez-vous que cette réponse est correcte ou qu'elle ne l'est pas ? Quelle(s) remarque(s) feriez vous à l'étudiant qui l'a écrite (pour souligner ses succès ainsi que pour l'aider à s'améliorer) ? Veillez à la qualité de votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section : Agrég math & phys

Question 7. On considère un miroir M d'équation $y = ax + b$. Un rayon lumineux se réfléchit sur ce miroir de telle manière que l'angle d'incidence α soit égal à l'angle de réflection β (voir figure 1). Si un rayon R d'équation $x = \gamma$ arrive verticalement sur M, alors le rayon réfléchi $\tilde{R}$ a pour équation /10

$$\tilde{R} \equiv y = a\gamma + b + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right)(x - \gamma). \tag{2}$$

De manière plus générale, un rayon se réfléchira sur un miroir quelconque en suivant la même loi à condition de mesurer les angles d'incidence et de réflection par rapport à la tangente au miroir au point de réflection, comme le montre la figure 2.

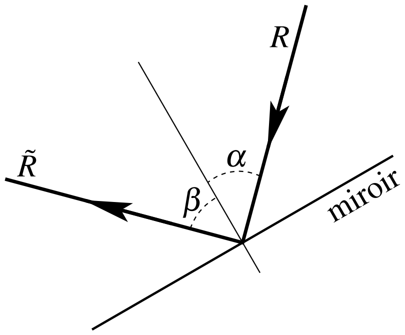


FIGURE 1 – Miroir plan

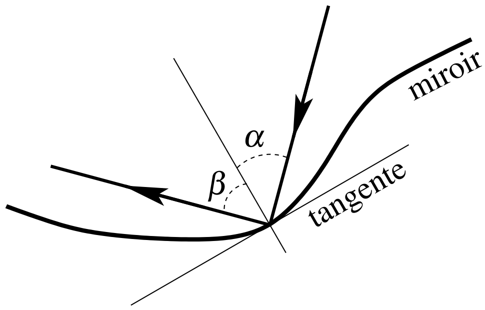


FIGURE 2 – Miroir quelconque

À partir des considérations ci-dessus, montrez que les rayons lumineux arrivant sur un miroir parabolique parallèlement à son axe de symétrie passent tous après réflection par un même point (voir figure 3) et déterminez ce point (qui est appelé *foyer* du miroir).

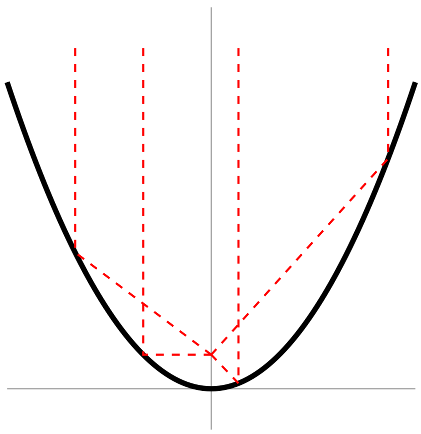


FIGURE 3 – Miroir parabolique

Nom :

Prénom :

Section : Agrég math & phys

Question 7 (suite). Veuillez poursuivre votre réponse sur cette page.