Mathématiques Élémentaires

Examen (16 août 2012)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

/5

- $\sum_{u=-3}^{v} u^2 =$

- $\sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=k+1}^{r} (\ell - k) =$

- $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2.

/4

(a) Recherchez l'ensemble A des vecteurs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux au vecteur $(1, -1, 2)$. Décrivez géométriquement l'ensemble A.

(b) Recherchez l'ensemble B des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ qui sont simultanément orthogonaux aux vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(-2, 1, 4)$. Décrivez géométriquement l'ensemble B.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez et exprimez le résultat final sous forme trigonométrique. /3

- $\overline{1-\boldsymbol{i}} =$

- $(3-3\boldsymbol{i})^{-1} =$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\boldsymbol{i}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

Question 4. Prouvez que /6

- $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$ à partir de la définition de l'inverse.

- $\bar{z}$ est l'inverse de z si et seulement si $|z| = 1$.

- pour tout $n \geqslant 1$, $\bar{z}^{-n} = \overline{z^{-n}}$.

Mathématiques Élémentaires

Examen (16 août 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Calculez /2

- $|-1-2\boldsymbol{i}| =$
- $\dfrac{5-2\boldsymbol{i}}{3-4\boldsymbol{i}} =$
- $|\boldsymbol{i}-3| =$
- $\overline{-7\boldsymbol{i}+5} =$
- $\left|(1+2\boldsymbol{i})^7(\boldsymbol{i}-3)^4\right|^2 =$

Question 6. /3

(a) La proposition $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \Rightarrow C$ est-elle une tautologie ?

(b) Donnez, en bon français, la négation de la phrase suivante : « Si je rate l'examen de Mathématique élémentaire, alors j'aurai aussi raté l'examen d'Analyse ».

Question 7. Calculez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y}} + \operatorname{arctg}\big(x^3 + \operatorname{tg}(x^2 y^{42})\big)$, où y est un paramètre réel, en $x = 0$. /3

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Prouver par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, /3

$$\partial_x^k\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

où, pour rappel, le symbole « ∂_x^k » signifie qu'on dérive l'expression k fois par rapport à x.

Mathématiques Élémentaires

Examen (16 août 2012)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. /5

(a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « B est l'inverse de A ».

(b) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dites sous quelle condition la matrice S est inversible. Donnez alors l'inverse de S et vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Résolvez le système suivant en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = 1 \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = 1 \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Calculez les déterminants suivants : /3

- dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- dét $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 11. Calculez (et simplifiez la réponse autant que possible) : /4

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x =$

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x =$

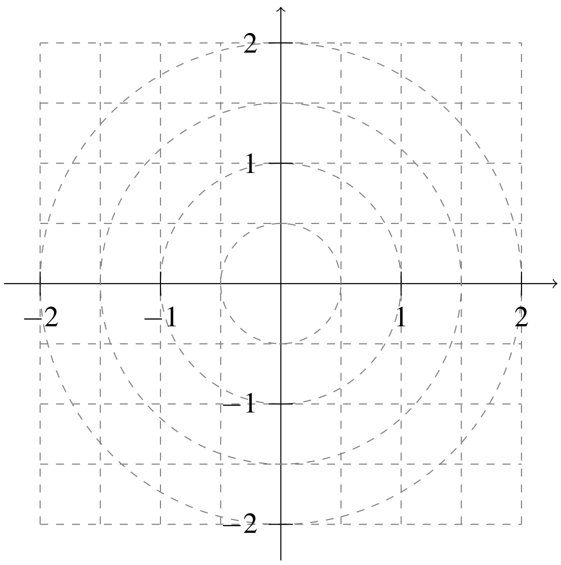
Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Calculez, dans $\mathbb{C}$, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, les solutions de chacune des deux équations suivantes : /6

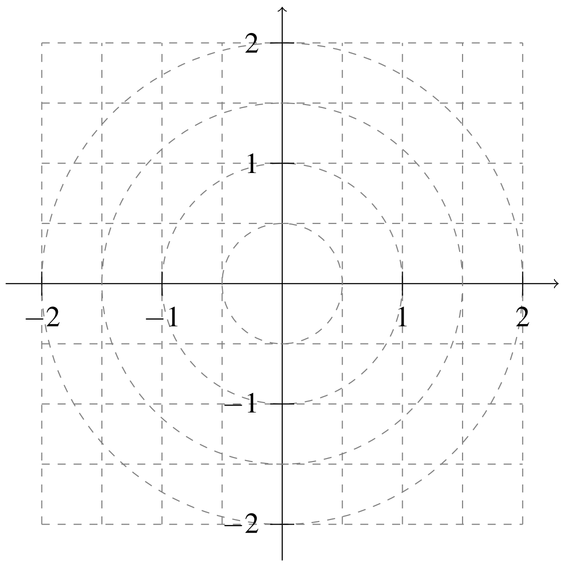
(a) $X^4 + 1 = 0$

(b) $X^6 + X^2 = 0$

Représentez ces solutions sur les graphes ci-dessous.



Solutions de $X^4 + 1 = 0$



Solutions de $X^6 + X^2 = 0$

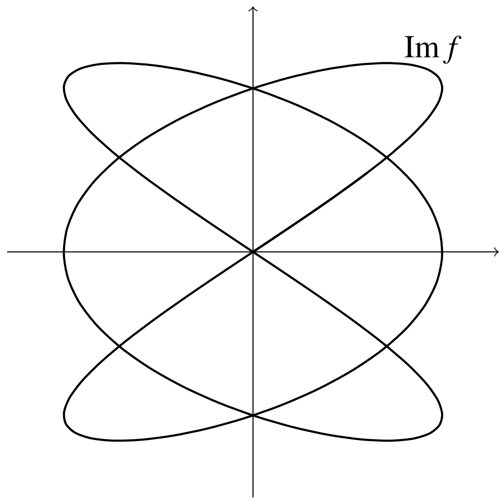
Mathématiques Élémentaires

Examen (16 août 2012)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/5

Question 13. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin(3t), \sin(2t)\big)$ dont l'image est représentée ci-dessous. Donnez une équation cartésienne de la tangente à l'image de f au point $f(2\pi/3)$. Représentez cette tangente sur le graphique. Le résultat est-il celui attendu ? Expliquez.



Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 14. Soit le système

$$\begin{cases} (m+1)x+my+mz=m \\ x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m=-5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m=-5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.