

Mathématique Élémentaire

Test n° 2

(26 septembre 2011)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Veillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

(a) $(1 + i)(3 - i) =$

(b) l'inverse dans \mathbb{C} de i :

(c) l'inverse dans \mathbb{C} de $(2 - i)$:

(d) $|1 + 7i| =$

(e) $|(1 + 7i)(12 - i)| =$

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2. Soit $-1 < x < 0$. Prouvez que $-x^2 < x^3 < 0$.

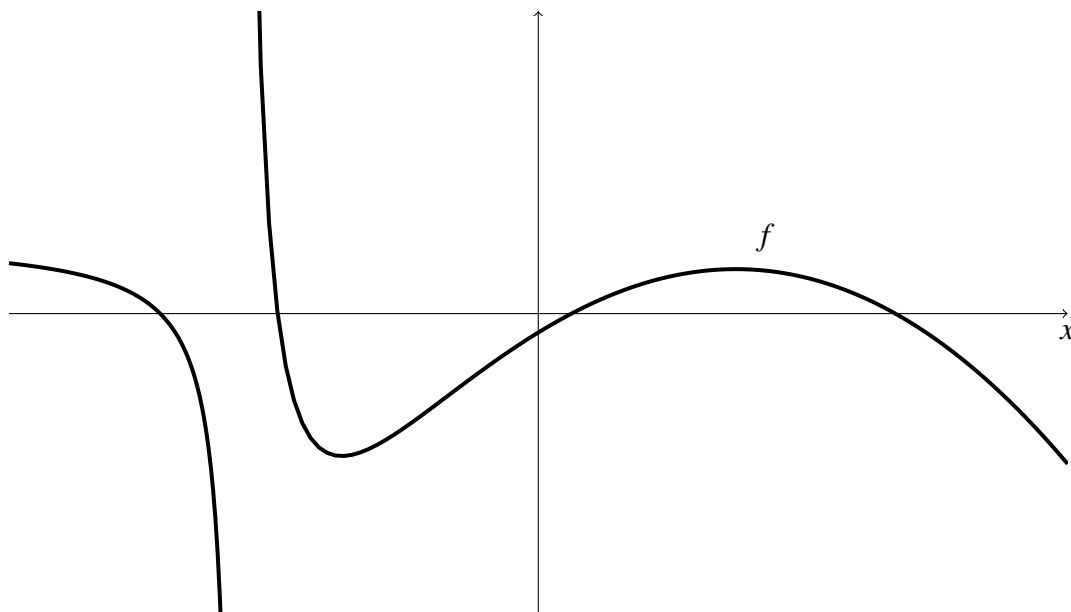
/2

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Prouvez que $f(0) = 0$.

/2

Question 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est dessiné ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$.

/2



Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Résolvez l'équation $X^2 - 3X + 4 = 0$ dans \mathbb{C} . Expliquez clairement votre démarche.

/4

Question 6.

/3

(a) Complétez la phrase suivante :

$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$ ssi

(b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Il existe un réel λ tel que $(1, 0, 1) = (0, 2, -2) + \lambda(3, -6, 9)$.

Question 7.

/4

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez que $\bar{z} = z$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ une solution du système en les inconnues (X_1, X_2) :

$$\begin{cases} aX_1^2 + bX_2 = c \\ dX_1 + eX_2^2 = f \end{cases} \quad (1)$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Prouvez que $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est également une solution du système (1).

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 8. Soit la droite D passant par les points $(-1, 4)$ et $(-2, -5)$.

- (a) Donnez un vecteur normal de D et la pente de D . Expliquez votre démarche.
- (b) Donnez une équation cartésienne de la droite D . Expliquez votre démarche.
- (c) Donnez un vecteur directeur de D dont la norme vaut 1.

/5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 9. Calculez $i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9$. En déduire une règle pour calculer i^n avec $n \in \mathbb{N}$.

/4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 10. Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$. Posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$.

/6

- (a) Définissez la norme de x , notée $\|x\|$.
- (b) Déterminez $\|x\|$ si $x \in \mathbb{R}$.
- (c) Montrez que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.
- (d) Montrez que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.