Mathématique Élémentaire

Test n$^\circ$ 2 (26 septembre 2011) **Correction**

Question 1. *Calculez*

(a) $(1+\boldsymbol{i})(3-\boldsymbol{i}) = 1\cdot 3 - i^2 + 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i} = 4+2\boldsymbol{i}.$

(b) *l'inverse dans* $\mathbb{C}$ *de* $\boldsymbol{i}$ *:* $\boldsymbol{i}^{-1} = -i$ car $(-\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}^2 = 1$.

(c) l'inverse dans $\mathbb{C}$ de $(2-\boldsymbol{i})$: par une formule du cours,

$$(2-\boldsymbol{i})^{-1} = \frac{2}{2^2+(-1)^2} + \frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\boldsymbol{i} = \frac{2}{5}+\frac{\boldsymbol{i}}{5}.$$

(d) $|1+7\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\cdot\sqrt{2}.$

(e) $|(1+7\boldsymbol{i})(12-\boldsymbol{i})| = |1+7i|\cdot|12-i| = 5\sqrt{2}\sqrt{12^2+1^2} = 5\sqrt{2}\sqrt{145}.$

Question 2. *Soit* $-1<x<0$*. Prouvez que* $-x^2<x^3<0$*.*

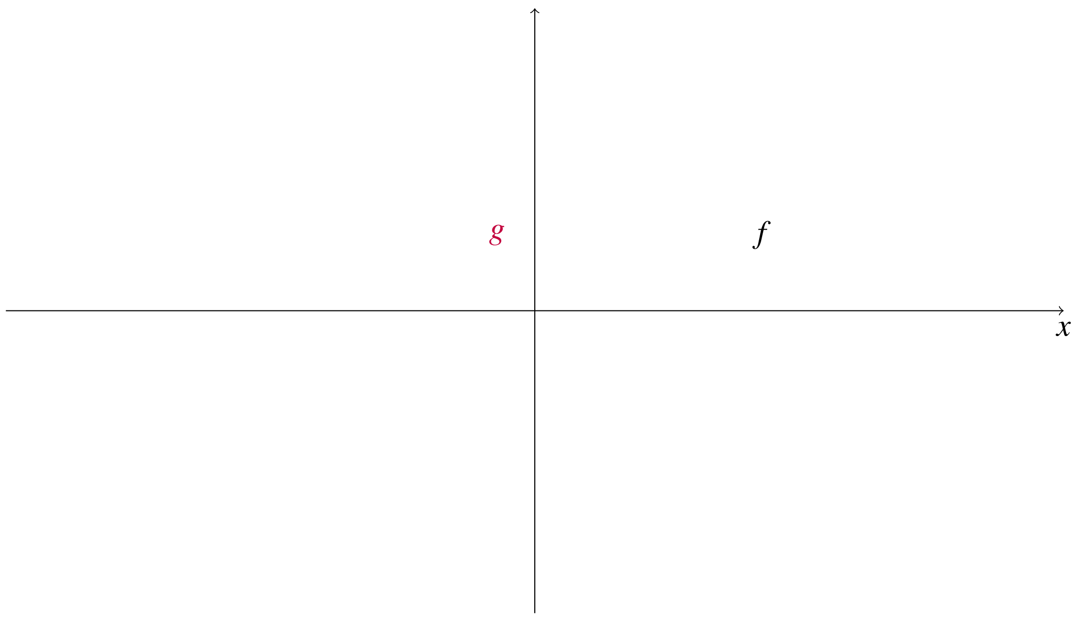
Puisque $x<0$, la multiplication par x des différents termes des inégalités $-1<x<0$ renverse le sens des inégalités : $-x>x^2>0$. Une nouvelle multiplication par x a le même effet, ce qui donne $-x^2<x^3<0$.

Question 3. *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction impaire. Prouvez que* $f(0)=0$*.*

Par définition de « impair », on sait que $-f(x)=f(-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En particulier, c'est vrai pour $x=0$, c'est-à-dire qu'on a $-f(0)=f(0)$. Ceci peut se réécrire $2f(0)=0$ et donc $f(0)=0$.

Question 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est dessiné ci-dessous. Sur ce même graphique, esquissez le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$.*

Lorsque $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire quand la fonction est au dessus ou sur de l'axe des x, $g(x) = f(x)$ et donc les graphes de f et g coïncident. Si au contraire $f(x) < 0$, c'est-à-dire lorsque la fonction f est en dessous de l'axe des x, $g(x) = -f(x)$; donc, pour ces x, on doit faire subir une symétrie d'axe x au graphe de f pour avoir celui de g.



Question 5. *Résolvez l'équation $X^2 - 3X + 4 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Expliquez clairement votre démarche.*

On calcule $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = -7$ dont les solutions dans $\mathbb{C}$ sont $y_1 = \boldsymbol{i}\sqrt{7}$ et $y_2 = -\boldsymbol{i}\sqrt{7}$. Il s'ensuit que (vu au cours) les solutions de l'équation sont

$$x_1 = \frac{-(-3) + y_1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) + y_2}{2},$$

c'est-à-dire

$$x_1 = \frac{3 + \boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 - \boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Question 6.

(a) Complétez la phrase suivante :

$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$ *ssi* $\boxed{u_1 = v_1 \textit{ et } u_2 = v_2 \textit{ et } u_3 = v_3.}$

(b) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Il existe un réel λ tel que $(1,0,1) = (0,2,-2) + \lambda(3,-6,9)$.

L'affirmation se ramène à savoir s'il existe un réel λ tel que

$$(1,0,1) = (0,2,-2) + (3\lambda, -6\lambda, 9\lambda)$$

par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel.
Par définition de l'addition de deux vecteurs, cela revient à dire que

$$(1,0,1) = (3\lambda, 2-6\lambda, -2+9\lambda).$$

On en déduit, grâce à l'égalité entre les deux vecteurs, que

$$1 = 3\lambda \quad \text{et} \quad 0 = 2-6\lambda \quad \text{et} \quad 1 = -2+9\lambda.$$

Les trois égalités sont vérifiées pour $\lambda = 1/3$. Par conséquent, l'affirmation est vraie.

Question 7.

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouvez que $\bar{z} = z$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Posons, $z = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Par définition de la conjugaison complexe, $\bar{z} = z$ ssi $a - b\boldsymbol{i} = a + b\boldsymbol{i}$, de plus $a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{R}$ ssi $b = 0$. La question revient donc à montrer que

$$a - b\boldsymbol{i} = a + b\boldsymbol{i} \quad \text{ssi} \quad b = 0.$$

Clairement, si $b = 0$, on a $a - b\boldsymbol{i} = a + b\boldsymbol{i}$. Réciproquement, si $a - b\boldsymbol{i} = a + b\boldsymbol{i}$, par définition de l'égalité de deux complexes, on a $a = a$ et $-b = b$, c'est-à-dire $b = 0$.

(b) *Soit* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *une solution du système en les inconnues* (X_1, X_2) *:*

$$\begin{cases} aX_1^2 + bX_2 = c \\ dX_1 + eX_2^2 = f \end{cases} \tag{1}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. *Prouvez que* $(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *est également une solution du système* (1).

Pour vérifier que $(\overline{z_1}, \overline{z_2})$ est solution du système, il suffit de vérifier que si on remplace X_1 par $\overline{z_1}$ et X_2 par $\overline{z_2}$ dans (1), on obtient bien les égalités requises c'est-à-dire que

$$\begin{cases} a\overline{z_1}^2 + b\overline{z_2} = c \\ d\overline{z_1} + e\overline{z_2}^2 = f. \end{cases}$$

Par conséquent, en prenant le complexe conjugué de chaque membre et en utilisant les règles de calcul sur le conjugué des sommes et des produits, on obtient :

$$\begin{cases} \overline{az_1^2 + bz_2} = \overline{c} \\ \overline{dz_1 + ez_2^2} = \overline{f} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \overline{az_1^2} + \overline{bz_2} = \overline{c} \\ \overline{dz_1} + \overline{ez_2^2} = \overline{f} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \overline{a}\,\overline{z_1}^2 + \overline{b}\,\overline{z_2} = \overline{c} \\ \overline{d}\,\overline{z_1} + \overline{e}\,\overline{z_2}^2 = \overline{f} \end{cases}$$

et vu que le conjugué d'un réel est ce réel,

$$\begin{cases} a\overline{z_1}^2 + b\overline{z_2} = c \\ d\overline{z_1} + e\overline{z_2}^2 = f. \end{cases}$$

C'est exactement ce qu'il fallait prouver.

Question 8. *Soit la droite D passant par les points* $(-1, 4)$ *et* $(-2, -5)$.

(a) *Donnez un vecteur normal de D et la pente de D. Expliquez votre démarche.*

On sait qu'un vecteur directeur d'une droite D passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. La pente est donnée par $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ici, un vecteur directeur sera donc $(-2 - (-1), -5 - 4) = (-1, -9)$. Par conséquent, un vecteur normal de D sera $(9, -1)$. En effet, ce vecteur est orthogonal au vecteur directeur puisque $\big((-1, -9) \mid (9, -1)\big) = -9 + 9 = 0$. La pente vaut ici $\frac{-5-4}{-2-(-1)} = \frac{-9}{-1} = 9$.

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D. Expliquez votre démarche.*

Comme un vecteur normal de D est $(9,-1)$, une équation cartésienne de D sera de la forme $9x-y=c$.

Pour déterminer, c, exprimons que $(-1,4) \in D$. Remplaçons pour cela x par -1 et y par 4 dans l'équation : $9(-1)-4=c$ c'est-à-dire $c=-9-4=-13$.

Donc, $D \equiv 9x-y=-13$.

(c) *Donnez un vecteur directeur de D dont la norme vaut* 1.

On a vu au cours que, pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $u \neq 0$, le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$ est de norme 1. Il suffit donc de diviser chaque composante du vecteur $(-1,-9)$ par la norme de ce vecteur. Or, $\|(-1,-9)\| = \sqrt{(-1)^2+(-9)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$. Par conséquent, $(\frac{-1}{\sqrt{82}}, \frac{-9}{\sqrt{82}})$ est un vecteur directeur de D de norme 1.

Question 9. *Calculez $\boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3, \boldsymbol{i}^4, \boldsymbol{i}^5, \boldsymbol{i}^6, \boldsymbol{i}^7, \boldsymbol{i}^8, \boldsymbol{i}^9$. En déduire une règle pour calculer $\boldsymbol{i}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.*

Par définition de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}^2=-1$. Donc,

- $\boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$;
- $\boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i}^2 = (-1)^2 = 1$;
- $\boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$;
- $\boldsymbol{i}^6 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^2 = 1 \cdot \boldsymbol{i}^2 = -1$;
- $\boldsymbol{i}^7 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^3 = 1 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i}$;
- $\boldsymbol{i}^8 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^4 = 1$;
- $\boldsymbol{i}^9 = \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i}^4 \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot 1 \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$.

On constate donc que $\boldsymbol{i}^4=1$, donc si $n \in \mathbb{N}$ et qu'on divise n par 4, on obtient $n = q \cdot 4 + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2,3\}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{i}^n = \boldsymbol{i}^{q \cdot 4 + r} = \boldsymbol{i}^{q \cdot 4} \cdot \boldsymbol{i}^r = (\boldsymbol{i}^4)^q \cdot \boldsymbol{i}^r = 1^q \cdot \boldsymbol{i}^r = \boldsymbol{i}^r$ c'est-à-dire vaut :

- 1 si $r=0$,
- $\boldsymbol{i}$ si $r=1$,
- $-\boldsymbol{i}$ si $r=2$,
- $-\boldsymbol{i}$ si $r=3$.

Question 10. *Soit $x, y \in \mathbb{R}^N$. Posons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$.*

(a) *Définissez la norme de x, notée $\|x\|$.*

(b) *Déterminez $\|x\|$ si $x \in \mathbb{R}$.*

(c) *Montrez que $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.*

(d) *Montrez que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.*

Voir correction du test 3, 1er octobre 2007, question 8.