

Question 1. Calculez

- $(3 - 7i)(2 + 5i)$: par définition du conjugué,

$$\begin{aligned} \overline{(3 - 7i)(2 + 5i)} &= (3 + 7i)(2 + 5i) \\ &= 6 + 35i^2 + 15i + 14i \\ &= -29 + 29i. \end{aligned}$$

- $(\frac{\sqrt{3}}{3} - i)^{-1}$: en utilisant la formule $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + i}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + i}{\frac{3}{9} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + i}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3i}{4}.$$

- $|-3\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = 6.$
- $|(-3\sqrt{3} + 3i)(4 - i)^2| = |-3\sqrt{3} + 3i| \cdot |4 - i|^2$ par la règle¹ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 $= 6 \cdot (4^2 + 1^2)$ par le calcul précédent
 $= 6 \cdot 17 = 102.$

Question 2.

(a) Calculez l'argument des complexes suivants :

- $2 - 2i,$
- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$
- $-3\sqrt{3} - 3i,$
- $1 + \operatorname{tg} \theta \cdot i$ avec $\theta \in [0, 2\pi[.$

Notons ces nombres complexes respectivement z_1, z_2, z_3 et z_4 .

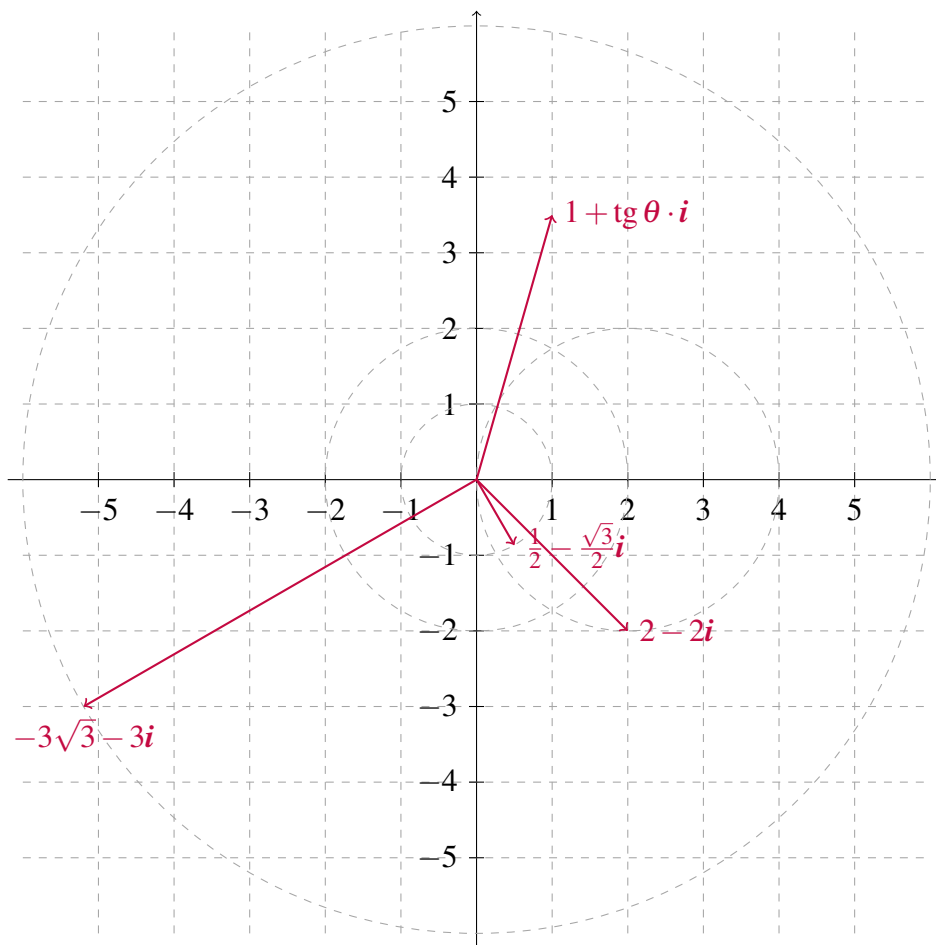
- $z_1 = 2 - 2i = 2(1 - i) = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$ (car $\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
- $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$ (car $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).
- $z_3 = -3\sqrt{3} - 3i = 6(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$. Donc, $|z_3| = 6$, $\cos(\operatorname{Arg} z_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\operatorname{Arg} z_3) = -\frac{1}{2}$.
D'où $\operatorname{Arg} z_3 = \frac{7\pi}{6}$. La forme trigonométrique de z_3 est donc : $6 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$.
- $z_4 = 1 + \operatorname{tg} \theta \cdot i = 1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot i$. Remarquons que si $\cos \theta = 0$, cette expression n'a aucun sens.
Si $\cos \theta > 0$, alors $z_4 = \frac{1}{\cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta)$.
Si $\cos \theta < 0$, alors $z_4 = -\frac{1}{\cos \theta} \cdot (-(\cos \theta + i \sin \theta)) = -\frac{1}{\cos \theta} \operatorname{cis}(\theta + \pi)$.

¹On déduit de cette règle que $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour conclure, les arguments demandés sont :

- $\text{Arg } z_1 = \frac{7\pi}{4}$
- $\text{Arg } z_2 = \frac{5\pi}{3}$
- $\text{Arg } z_3 = \frac{7\pi}{6}$
- $\text{Arg } z_4 = \theta$ si $\cos \theta > 0$ et $\text{Arg } z_4 = \theta + \pi$ si $\cos \theta < 0$.

(b) Représentez ces complexes dans le plan (pour le quatrième, faites un choix qui ne soit pas trop particulier) et donnez en la forme trigonométrique.



Question 3. Soit z un complexe d'argument θ et de module ρ . Donnez l'argument et le module de \bar{z} .

Par hypothèse, $z = \rho \cdot \text{cis } \theta = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$. Donc,

$\bar{z} = \overline{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)}$	par la règle $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
$= \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$	car $z = \bar{z}$ ssi $z \in \mathbb{R}$
$= \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$	car $\cos \theta = \cos(-\theta)$ et $-\sin \theta = \sin(-\theta)$
$= \rho \text{cis}(2\pi - \theta)$.	

Donc,

■ Si $\theta \neq 0$, $|\bar{z}| = |z|$ et $\text{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \theta \in [0, 2\pi[$.

■ Si $\theta = 0$, alors z est réel et $\bar{z} = z$,

Conclusion : $|\bar{z}| = |z| = \rho$ et $\text{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \text{Arg}(z) = 2\pi - \theta$, si $\theta \neq 0$, et $\text{Arg}(\bar{z}) = \text{Arg}(z) = 0$, si $\theta = 0$.

Question 4. *Donnez toutes les solutions $x \in \mathbb{R}$ de $\sin(1/x) = 1$.*

On sait que

$$\sin t = 1 \text{ et } t \in [0, 2\pi[\quad \text{ssi} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

et que \sin est une fonction périodique de période 2π sur \mathbb{R} .

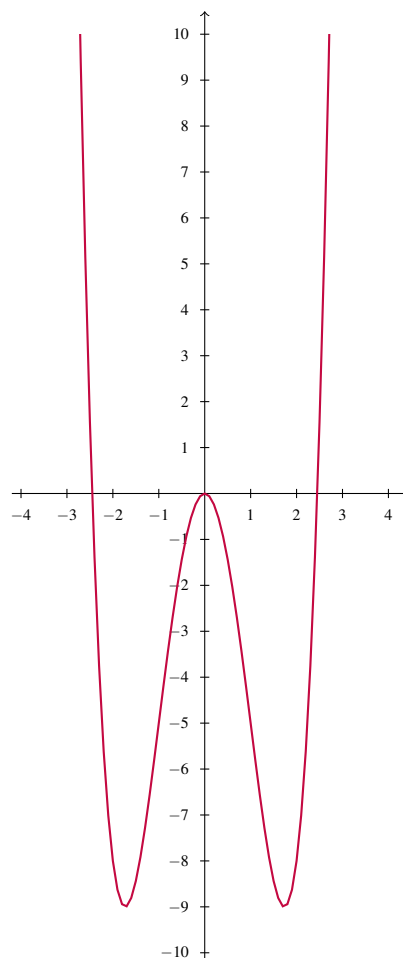
Donc, $\sin t = 1$ ssi $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ssi $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $x = (\frac{\pi(1+4k)}{2})^{-1}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit :

$$x = \frac{2}{\pi(1+4k)} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

Question 5. *Sur le graphique ci-contre, esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 6x^2$. Expliquez votre démarche. La qualité de celle-ci est importante.*

Commençons par remarquer que la fonction f est paire. En effet quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = f(x)$. Son graphe possède donc une symétrie orthogonale d'axe y . Lorsque $x \approx 0$, x^4 est beaucoup plus petit que x^2 et donc $f(x) \approx -6x^2$. Lorsque $x > 0$ est grand, x^4 est beaucoup plus grand que x^2 et donc $f(x) \approx x^4$. (On peut aussi calculer les racines de f qui sont $0, \sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.)



Question 6.

- (a) Soient a, b deux réels non nuls. Montrez qu'une équation cartésienne de la droite D passant par les points $(a, 0)$ et $(0, b)$ est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Un vecteur directeur de D est $(-a, b)$. Un vecteur normal de D sera donc (b, a) car

$$((b, a) \mid (-a, b)) = -ab + ab = 0.$$

Une équation cartésienne de D sera de la forme $bx + ay = c$. Puisque $(a, 0) \in D$, on trouve c en remplaçant x par a et y par 0 . Cela nous donne $c = ab$. Donc, $D \equiv bx + ay = ab$.

Comme $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on peut diviser chaque membre de l'équation par ab . En conclusion,

$$D \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

- (b) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

Comme D et D' sont perpendiculaires, un vecteur directeur de D est un vecteur normal de D' . Nous avons trouvé un tel vecteur au point (a). Il s'agit de $(-a, b)$. Donc une équation cartésienne de D' sera de la forme $-ax + by = c$. Comme D' passe par l'origine du repère, on trouve c en remplaçant x et y par 0 , ce qui donne $c = 0$.

En conclusion, $D' \equiv -ax + by = 0$.

Question 7.

- (a) Donnez la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(5, -4)$ et parallèle à la droite D' dont une équation paramétrique est

$$(x, y) = (\lambda, 3\lambda), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (b) Soit la droite D passant par le point $(3, 4)$ et par le milieu du segment joignant les points $(-1, 1)$ et $(3, 9)$. Montrez que la droite D est perpendiculaire au segment.

- (a) On a $D' \equiv (x, y) = \lambda(1, 3)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de D' est donc $(1, 3)$. C'est donc aussi un vecteur directeur de D puisque ces deux droites sont parallèles. La pente de D vaut donc $\frac{3}{1} = 3$ et une équation cartésienne de D sera de la forme $y = 3x + p$.

On trouve p en remplaçant x par 5 et y par -4 :

$$-4 = 3 \cdot 5 + p \quad \Rightarrow \quad p = -4 - 15 = -19.$$

Donc, $D \equiv y = 3x - 19$. Par conséquent, la fonction recherchée est $f(x) = 3x - 19$.

- (b) Montrons que la pente de D et celle de la droite passant par $(-1, 1)$ et $(3, 9)$ sont l'opposée de l'inverse l'une de l'autre. Le milieu du segment a pour composantes $(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+9}{2}) = (1, 5)$. Par conséquent, la pente de D vaut $\frac{5-4}{1-3} = \frac{-1}{2}$. La pente de la droite passant par $(-1, 1)$ et $(3, 9)$ vaut $\frac{9-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$.
On a $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, les pentes sont donc des réels inverses et opposés.

Question 8. Résoudre $X^2 - 3X + 1 = 0$ dans \mathbb{C} .

Le discriminant Δ vaut $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 5$, dont les solutions y_1 et y_2 sont respectivement $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

Il s'ensuit, en appliquant la formule vue au cours, que les solutions de $X^2 - 3X + 1 = 0$ dans \mathbb{C} sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Question 9.

(a) Définissez a est un minimum de l'ensemble A .

Par définition, a est un minimum de l'ensemble A si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) $a \in A$;
- (ii) pour tout $x \in A$, $a \leq x$.

(b) Prouvez que si a_1 et a_2 sont des minimums de A , alors $a_1 = a_2$.

Puisque a_1 vérifie cette définition, on a que pour tout $x \in A$, $a_1 \leq x$. En particulier, si $x = a_2$ (on peut prendre cette valeur particulière pour x car, par définition de minimum, $a_2 \in A$), on obtient $a_1 \leq a_2$.

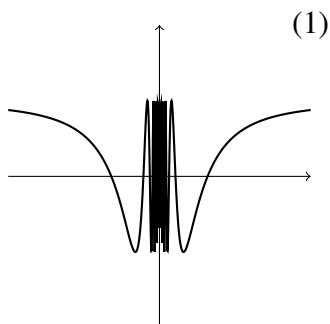
En renversant les rôles de a_1 et a_2 (ce qui est licite vu les hypothèses), on obtient aussi $a_2 \leq a_1$. Donc, finalement $a_1 = a_2$.

Question 10. Repérez le graphe de chacune des fonctions suivantes sur les graphes ci-dessous. Justifiez vos choix.

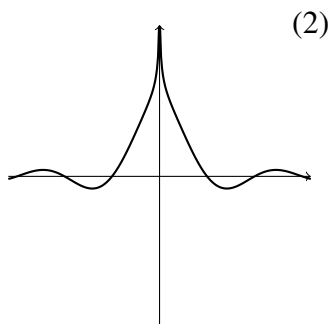
■ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x$

■ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

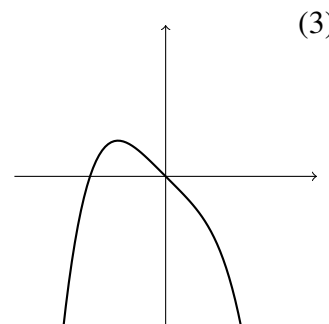
■ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(1/x)$



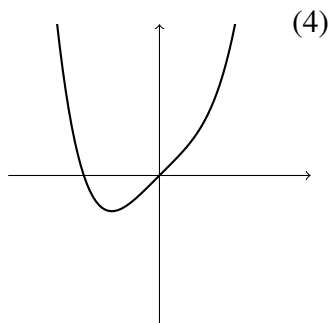
(1)



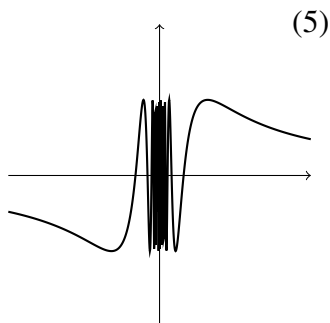
(2)



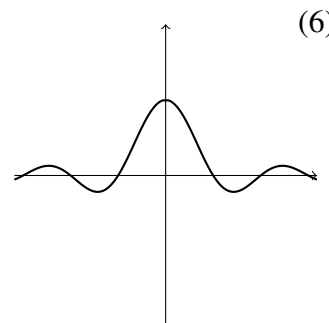
(3)



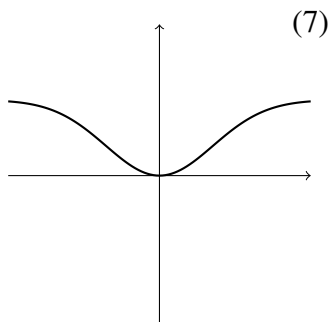
(4)



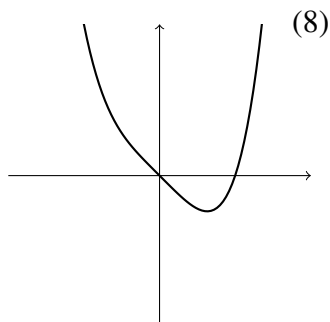
(5)



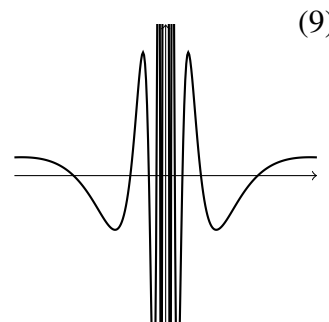
(6)



(7)



(8)



(9)

■ La fonction f s'annule en 0 et en 1. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont $+\infty$. De plus, vu que x^4 prend des valeurs négligeables par rapport à x quand x est très proche de 0, la fonction ressemble à la droite d'équation $y = -x$ quand $x \approx 0$. C'est donc (8).

■ La fonction g est paire : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = g(x)$. De plus, $|\frac{\sin x}{x}| \leq |\frac{1}{x}|$ et donc si $|x| \geq 1$, alors $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$. Ceci exclut les graphes (4), (8), (3) et (5). D'autre part, pour tout $x \neq 0$, $g(x) = 0$ ssi $\sin x = 0$ ssi x est un multiple de π . Ceci exclut (7), (9) et (1).

Au voisinage de 0 (c'est à dire pour des valeurs de x qui sont suffisamment proches de 0), $\sin x$ prend des valeurs très proches de x . Donc, quand x est proche de 0, $\frac{\sin x}{x}$ est proche de 1. Ceci exclut (2).

Il reste (6).

- On constate que la fonction h est paire (car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$). Lorsque $|x|$ est très grand, $1/x \approx 0$ et donc $\cos(1/x) \approx 1$. Seuls les graphes (1), (7) et (9) satisfont ces propriétés.

Enfin, on peut déterminer les zéros de la fonction (de manière similaire à la question 4) :

$$\cos \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ssi} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z}).$$

Autrement dit, $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Il y a donc une infinité de racines qui sont arbitrairement proches de 0, ce qui exclu (7).

C'est donc le graphe (1) car $|\cos \frac{1}{x}| \leq 1$ et tous ses maximums (locaux) ont pour image 1.