Mathématique Élémentaire

Test n° 3 (3 octobre 2011) **Correction**

Question 1. *Calculez*

- $\overline{(3-7\boldsymbol{i})}(2+5\boldsymbol{i})$ *:* par définition du conjugué,

$$\begin{aligned}\overline{(3-7\boldsymbol{i})}(2+5\boldsymbol{i}) &= (3+7\boldsymbol{i})(2+5\boldsymbol{i})\\ &= 6+35\boldsymbol{i}^2+15\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{i}\\ &= -29+29\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\boldsymbol{i}\right)^{-1}$ *:* en utilisant la formule $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\frac{3}{9}+1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\boldsymbol{i}}{4}.$$

- $|-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i}|=\sqrt{(-3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=6.$
- $$\begin{aligned}\left|(-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i})(4-\boldsymbol{i})^2\right| &= |-3\sqrt{3}+3\boldsymbol{i}|\cdot|4-\boldsymbol{i}|^2 && \textit{par la règle}^1\ |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\\ &= 6\cdot(4^2+1^2) && \textit{par le calcul précédent}\\ &= 6\cdot 17=102.\end{aligned}$$

Question 2.

(a) *Calculez l'argument des complexes suivants :*

- $2-2\boldsymbol{i}$,
- $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$,
- $-3\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}$,
- $1+\operatorname{tg}\theta\cdot\boldsymbol{i}$ *avec* $\theta\in[0,2\pi[$.

Notons ces nombres complexes respectivement z_1, z_2, z_3 et z_4.

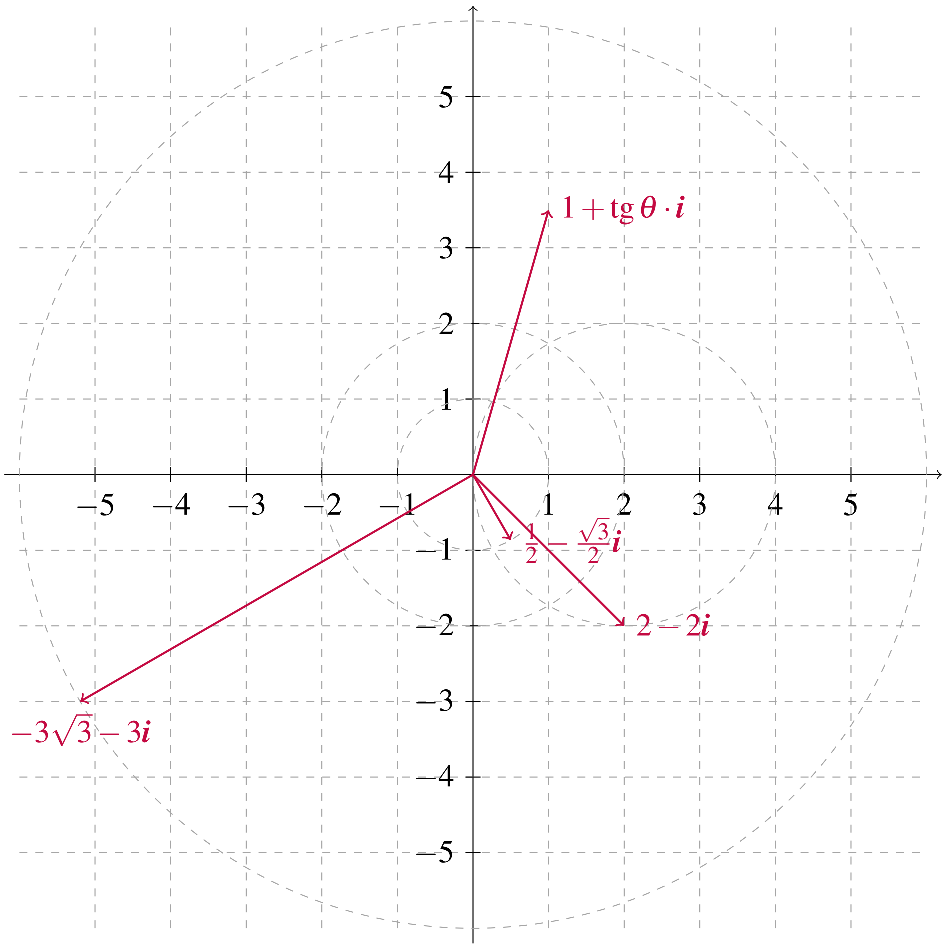
- $z_1=2-2\boldsymbol{i}=2(1-\boldsymbol{i})=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i})=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ (car $\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$).
- $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}=1\cdot\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$ (car $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$).
- $z_3=-3\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}=6(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i})$. Donc, $|z_3|=6$, $\cos(\operatorname{Arg} z_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\operatorname{Arg} z_3)=-\frac{1}{2}$. D'où $\operatorname{Arg} z_3=\frac{7\pi}{6}$. La forme trigonométrique de z_3 est donc : $6\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}$.
- $z_4=1+\operatorname{tg}\theta\cdot\boldsymbol{i}=1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\boldsymbol{i}$. Remarquons que si $\cos\theta=0$, cette expression n'a aucun sens.
  Si $\cos\theta>0$, alors $z_4=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)$.
  Si $\cos\theta<0$, alors $z_4=-\frac{1}{\cos\theta}\cdot\big(-(\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta)\big)=-\frac{1}{\cos\theta}\operatorname{cis}(\theta+\pi)$.

[1] On déduit de cette règle que $|z^n|=|z|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$..

Pour conclure, les arguments demandés sont :

- Arg $z_1 = \frac{7\pi}{4}$
- Arg $z_2 = \frac{5\pi}{3}$
- Arg $z_3 = \frac{7\pi}{6}$
- Arg $z_4 = \theta$ si $\cos\theta > 0$ et Arg $z_4 = \theta + \pi$ si $\cos\theta < 0$.

(b) *Représentez ces complexes dans le plan (pour le quatrième, faites un choix qui ne soit pas trop particulier) et donnez en la forme trigonométrique.*



Question 3. *Soit z un complexe d'argument θ et de module ρ. Donnez l'argument et le module de $\bar{z}$.*

Par hypothèse, $z = \rho \cdot \mathrm{cis}\,\theta = \rho \cdot (\cos\theta + \boldsymbol{i} \cdot \sin\theta)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \bar{\rho}(\overline{\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta}) && \text{par la règle } \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
&= \rho(\cos\theta - \boldsymbol{i}\sin\theta) && \text{car } z = \bar{z} \text{ ssi } z \in \mathbb{R} \\
&= \rho(\cos(-\theta) + \boldsymbol{i}\sin(-\theta)) && \text{car } \cos\theta = \cos(-\theta) \text{ et } -\sin\theta = \sin(-\theta) \\
&= \rho\,\mathrm{cis}(2\pi - \theta).
\end{aligned}$$

Donc,

- Si $\theta \neq 0$, $|\bar{z}| = |z|$ et $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \theta \in [0, 2\pi[$.
- Si $\theta = 0$, alors z est réel et $\bar{z} = z$,

Conclusion : $|\bar{z}| = |z| = \rho$ et $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = 2\pi - \mathrm{Arg}(z) = 2\pi - \theta$, si $\theta \neq 0$, et $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = \mathrm{Arg}(z) = 0$, si $\theta = 0$.

Question 4. *Donnez toutes les solutions $x \in \mathbb{R}$ de* $\sin(1/x) = 1$.

On sait que

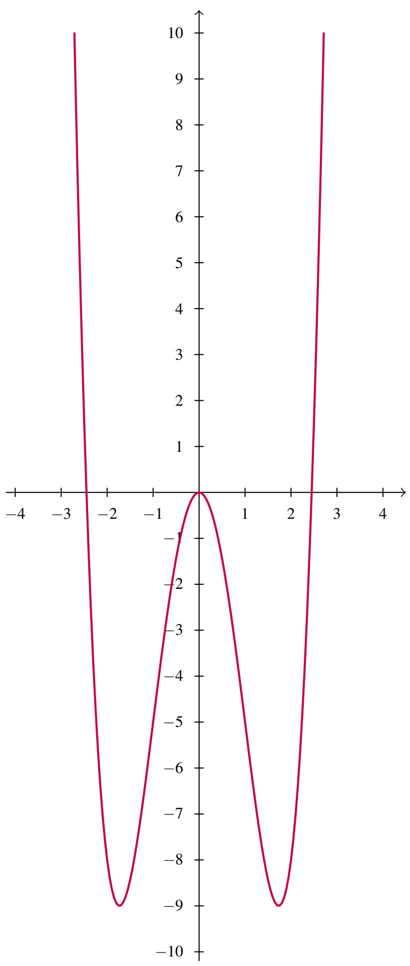
$$\sin t = 1 \text{ et } t \in [0, 2\pi[\quad \text{ssi} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

et que sin est une fonction périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$.
Donc, $\sin t = 1$ ssi $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ ssi $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $x = \left(\frac{\pi(1+4k)}{2}\right)^{-1}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit :

$$x = \frac{2}{\pi(1+4k)} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

Question 5. *Sur le graphique ci-contre, esquissez le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 6x^2$. Expliquez votre démarche. La qualité de celle-ci est importante.*

Commençons par remarquer que la fonction f est paire. En effet quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = f(x)$. Son graphe possède donc une symétrie orthogonale d'axe y. Lorsque $x \approx 0$, x^4 est beaucoup plus petit que x^2 et donc $f(x) \approx -6x^2$. Lorsque $x > 0$ est grand, x^4 est beaucoup plus grand que x^2 et donc $f(x) \approx x^4$. (On peut aussi calculer les racines de f qui sont $0, \sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.)



Question 6.

(a) *Soient a, b deux réels non nuls. Montrez qu'une équation cartésienne de la droite D passant par les points $(a,0)$ et $(0,b)$ est*
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Un vecteur directeur de D est $(-a,b)$. Un vecteur normal de D sera donc (b,a) car
$$\big((b,a)\;\big|\;(-a,b)\big)=-ab+ab=0.$$

Une equation cartésienne de D sera de la forme $bx+ay=c$. Puisque $(a,0)\in D$, on trouve c en remplaçant x par a et y par 0. Cela nous donne $c=ab$. Donc, $D\equiv bx+ay=ab$.

Comme $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on peut diviser chaque membre de l'équation par ab. En conclusion,
$$D\equiv\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.*

Comme D et D' sont perpendiculaires, un vecteur directeur de D est un vecteur normal de D'. Nous avons trouvé un tel vecteur au point (a). Il s'agit de $(-a,b)$. Donc une équation cartésienne de D' sera de la forme $-ax+by=c$. Comme D' passe par l'origine du repère, on trouve c en remplaçant x et y par 0, ce qui donne $c=0$.

En conclusion, $D'\equiv -ax+by=0$.

Question 7.

(a) *Donnez la fonction du premier degré dont le graphe est la droite D passant par le point $(5,-4)$ et parallèle à la droite D' dont une équation paramétrique est*
$$(x,y)=(\lambda,3\lambda),\quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

(b) *Soit la droite D passant par le point $(3,4)$ et par le milieu du segment joignant les points $(-1,1)$ et $(3,9)$. Montrez que la droite D est perpendiculaire au segment.*

(a) On a $D'\equiv(x,y)=\lambda(1,3)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de D' est donc $(1,3)$. C'est donc aussi un vecteur directeur de D puisque ces deux droites sont parallèles. La pente de D vaut donc $\frac{3}{1}=3$ et une équation cartésienne de D sera de la forme $y=3x+p$.

On trouve p en remplaçant x par 5 et y par -4 :
$$-4=3\cdot5+p\quad\Rightarrow\quad p=-4-15=-19.$$

Donc, $D\equiv y=3x-19$. Par conséquent, la fonction recherchée est $f(x)=3x-19$.

(b) Montrons que la pente de D et celle de la droite passant par $(-1,1)$ et $(3,9)$ sont l'opposée de l'inverse l'une de l'autre. Le milieu du segment a pour composantes $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+9}{2}\right) = (1,5)$. Par conséquent, la pente de D vaut $\frac{5-4}{1-3} = \frac{-1}{2}$. La pente de la droite passant par $(-1,1)$ et $(3,9)$ vaut $\frac{9-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$.

On a $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, les pentes sont donc des réels inverses et opposés.

Question 8. *Résoudre $X^2 - 3X + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.*

Le discriminant Δ vaut $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 5$, dont les solutions y_1 et y_2 sont respectivement $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
Il s'ensuit, en appliquant la formule vue au cours, que les solutions de $X^2 - 3X + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Question 9.

(a) *Définissez a est un minimum de l'ensemble A.*

Par définition, a est un minimum de l'ensemble A si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $a \in A$;

(ii) pour tout $x \in A$, $a \leqslant x$.

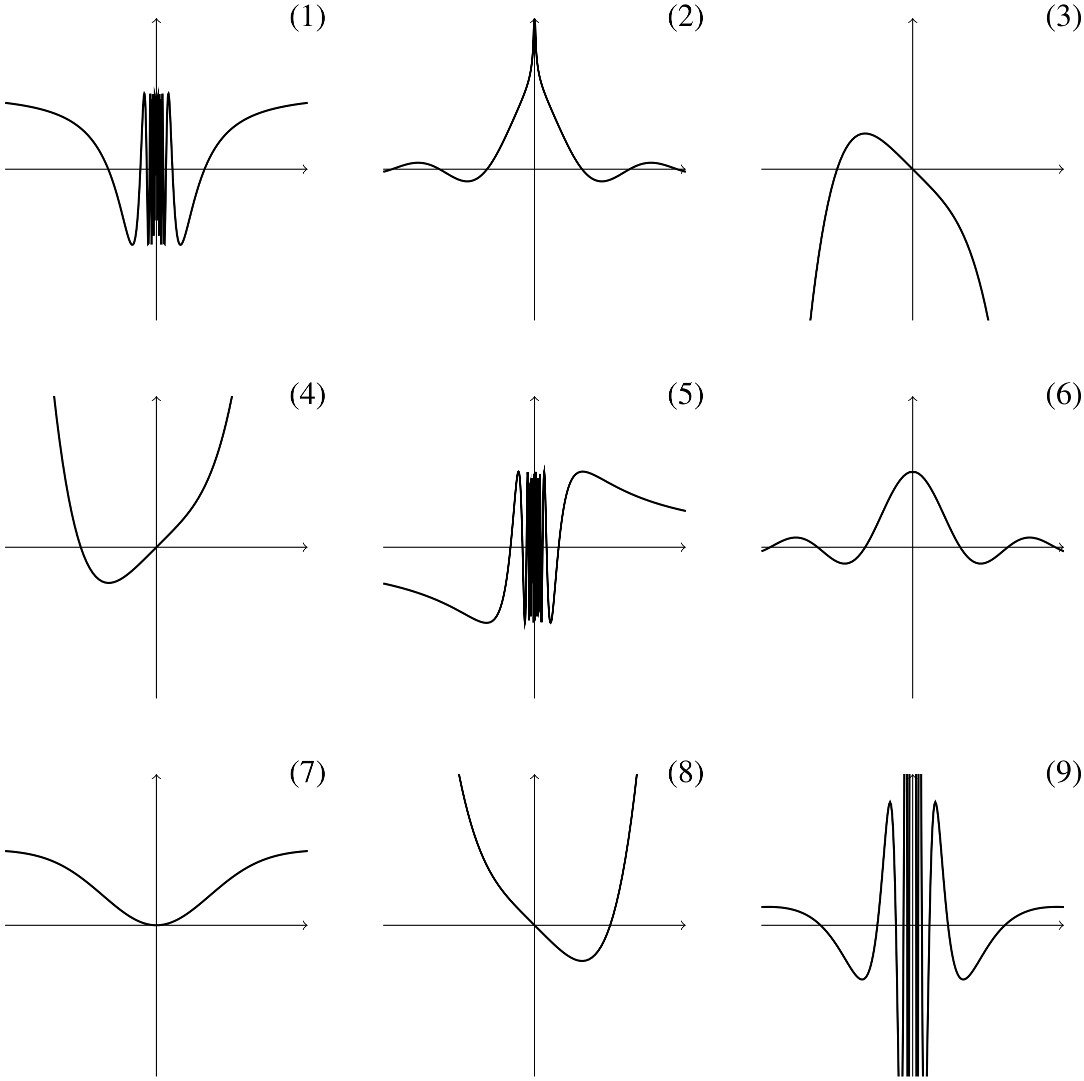
(b) *Prouvez que si a_1 et a_2 sont des minimums de A, alors $a_1 = a_2$.*

Puisque a_1 vérifie cette définition, on a que pour tout $x \in A$, $a_1 \leqslant x$. En particulier, si $x = a_2$ (on peut prendre cette valeur particulière pour x car, par définition de minimum, $a_2 \in A$), on obtient $a_1 \leqslant a_2$.

En renversant les rôles de a_1 et a_2 (ce qui est licite vu les hypothèses), on obtient aussi $a_2 \leqslant a_1$. Donc, finalement $a_1 = a_2$.

Question 10. *Repérez le graphe de chacune des fonctions suivantes sur les graphes ci-dessous. Justifiez vos choix.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(1/x)$



- La fonction f s'annule en 0 et en 1. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont $+\infty$. De plus, vu que x^4 prend des valeurs négligeables par rapport à x quand x est très proche de 0, la fonction ressemble à la droite d'équation $y = -x$ quand $x \approx 0$. C'est donc (8).
- La fonction g est paire : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = g(x)$. De plus, $|\frac{\sin x}{x}| \leqslant |\frac{1}{x}|$ et donc si $|x| \geqslant 1$, alors $|\frac{\sin x}{x}| \leqslant 1$. Ceci exclut les graphes (4), (8), (3) et (5). D'autre part, pour tout $x \neq 0$, $g(x) = 0$ ssi $\sin x = 0$ ssi x est un multiple de π. Ceci exclut (7), (9) et (1).

Au voisinage de 0 (c'est à dire pour des valeurs de x qui sont suffisamment proches de 0), $\sin x$ prend des valeurs très proches de x. Donc, quand x est proche de 0, $\frac{\sin x}{x}$ est proche de 1. Ceci exclut (2).

Il reste (6).

- On constate que la fonction h est paire (car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$). Lorsque $|x|$ est très grand, $1/x \approx 0$ et donc $\cos(1/x) \approx 1$. Seuls les graphes (1), (7) et (9) satisfont ces propriétés.

  Enfin, on peut déterminer les zéros de la fonction (de manière similaire à la question 4) :

$$\cos\frac{1}{x} = 0 \qquad \text{ssi} \qquad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z}).$$

  Autrement dit, $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Il y a donc une infinité de racines qui sont arbitrairement proches de 0, ce qui exclut (7).

  C'est donc le graphe (1) car $|\cos\frac{1}{x}| \leqslant 1$ et tous ses maximums (locaux) ont pour image 1.