Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (10 octobre 2011) **Correction**

Question 1. *Calculez* $\left|(-2-\boldsymbol{i})^7\right|$.

On sait que pour tout nombre complexe z et tout naturel k, $|z^k| = |z|^k$. De plus, $|-2-\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$. On a donc $\left|(-2-\boldsymbol{i})^7\right| = (\sqrt{5})^7 = 5^3\sqrt{5} = 125\sqrt{5}$.

Question 2. *Calculez, sous forme trigonométrique,* $(1+\boldsymbol{i})^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

On écrit $1+\boldsymbol{i}$ sous forme trigonométrique, ce qui donne $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. De plus, on sait que $(\rho\operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n\operatorname{cis}(n\cdot\theta)$. Donc, $(1+\boldsymbol{i})^n = (\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^n = (\sqrt{2})^n\operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}$.

Question 3. *Prouvez que, pour tout* $n, n' \in \mathbb{N}$, $n \neq n' \Rightarrow (1+\boldsymbol{i})^n \neq (1+\boldsymbol{i})^{n'}$.

Commençons par rappeler que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules et arguments sont égaux. Par conséquent, si deux nombres complexes n'ont pas les mêmes modules, ils ne seront pas égaux.
Par la réponse apportée à la question précédente, on sait que $(1+\boldsymbol{i})^n = \sqrt{2}^n\operatorname{cis}\frac{n\pi}{4}$.
Donc, si $n \neq n'$, on a clairement que $\left(\sqrt{2}\right)^n \neq \left(\sqrt{2}\right)^{n'}$, ce qui implique que $(1+\boldsymbol{i})^n \neq (1+\boldsymbol{i})^{n'}$ puisque ces deux nombres n'ont pas les mêmes modules.

Question 4. *Calculez les dérivées suivantes :*

- $\partial_x\left(e^{x^3+1}\right) = \left(\partial_z e^z\right)\big|_{z=x^3+1}\cdot\partial_x(x^3+1) = 3x^2 e^{x^3+1}$
- $$\begin{aligned}\partial_u\sin\left(\cos(xu)\right) &= \partial_v\sin v|_{v=\cos(xu)}\cdot\partial_u\left(\cos(xu)\right)\\ &= \cos(\cos(xu))\cdot\partial_s\cos(s)|_{s=xu}\cdot\partial_u(xu)\\ &= \cos(\cos(xu))\cdot(-\sin(xu))x\\ &= -x\sin(xu)\cos(\cos(xu))\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{\sqrt{t}}{1+t}\right)\Big|_{t=1} &= \frac{\partial_t\sqrt{t}(1+t)-\sqrt{t}\partial_t(1+t)}{(1+t)^2}\Big|_{t=1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+t)-\sqrt{t}\cdot 1}{(1+t)^2}\Big|_{t=1}\\ &= \frac{1+t-2(\sqrt{t})^2}{2\sqrt{t}(1+t)^2}\Big|_{t=1} = \frac{1-t}{2\sqrt{t}(1+t)^2}\Big|_{t=1} = \frac{1-1}{2\sqrt{1}\cdot 2^2} = 0.\end{aligned}$$

Question 5.

(a) *Donnez une équation cartésienne du plan* α *passant par* $(1,-1,2)$ *et parallèle au plan OYZ.*

Le plan recherché étant parallèle au plan OYZ, un vecteur normal sera $(1,0,0)$. Une équation cartésienne de α est donc de la forme $x = d$. Comme $(1,-1,2) \in \alpha$, on en déduit que d vaut 1 en remplaçant x par 1. Donc, $\alpha \equiv x = 1$.

(b) *Donnez un système d'équations cartésiennes de la droite D passant par le point* $(-1,2,3)$ *et parallèle à la droite* $D' \equiv (x,y,z) = (\lambda+2,-4,5\lambda+1)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $D' \equiv (x,y,z) = (2,-4,1) + \lambda(1,0,5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, en utilisant les opérations sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, un vecteur directeur de D' est $(1,0,5)$ et c'est également un vecteur directeur de D car les deux droites sont parallèles. Comme $(-1,2,3) \in D$, une équation paramétrique de D est donc

$$(x,y,z) = (-1,2,3) + \lambda(1,0,5), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2 \\ z = 3+5\lambda. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $\lambda = x+1$ et de la troisième on obtient $\lambda = \frac{z-3}{5}$. Un système d'équations cartésiennes de D est donc

$$\begin{cases} x+1 = \frac{z-3}{5} \\ y = 2, \end{cases}$$

ou encore

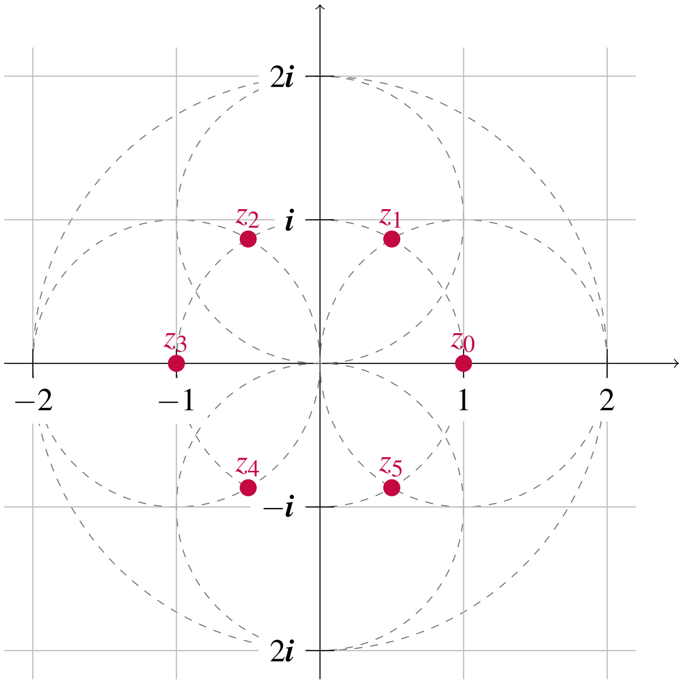
$$\begin{cases} 5x - z = -8 \\ y = 2. \end{cases}$$

Question 6. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^6 = 1$. Représentez les solutions sur le graphique ci-dessous et donnez ces solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

On sait que si $n \in \mathbb{N}$, les solutions de l'équation $X^n = 1$ sont de la forme $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$ où $k = 0, \dots, n-1$. Pour $n = 6$, les solutions sont donc $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{6} = \operatorname{cis} \frac{k\pi}{3} = \cos \frac{k\pi}{3} + \boldsymbol{i} \sin \frac{k\pi}{3}$ où $k = 0, \dots, 5$.

Explicitement, on a :

- $\operatorname{cis} 0 = 1$,
- $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\operatorname{cis} \pi = -1$,
- $\operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Question 7. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) *Si (α, β) est solution du système*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = 0, \end{cases}$$

alors (α, β) est orthogonal à $(1, 3/2)$.

L'affirmation est vraie.

Supposons en effet que (α, β) soit solution du système. Autrement dit, (α, β) vérifie chaque équation. On a donc

$$2\alpha + 3\beta = 0 \tag{1}$$
$$5\alpha - 7\beta = 0. \tag{2}$$

Remarquons que (1) s'écrit $2(\alpha + \frac{3}{2}\beta) = 0$, c'est-à-dire $\alpha + \frac{3}{2}\beta = 0$. Cette dernière égalité veut dire que $\big((\alpha, \beta) \,\big|\, (1, \frac{3}{2})\big) = 0$, ou encore que (α, β) est orthogonal à $(1, \frac{3}{2})$.

(b) Si (α,β) est orthogonal à $(1,3/2)$, alors (α,β) est solution du système

$$\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 5x-7y=0. \end{cases}$$

L'affirmation est fausse. Prenons par exemple $(\alpha,\beta)=(-3,2)$. Montrons que (α,β) est orthogonal à $(1,\frac{3}{2})$ mais que (α,β) n'est pas solution du système.

On a (α,β) est orthogonal à $(1,\frac{3}{2})$ car $\big((-3,2)\mid(1,\frac{3}{2})\big)=-3+3=0$. Le vecteur (α,β) n'est donc pas solution du système car il ne satisfait pas la deuxième équation. En effet, $5\cdot(-3)-7\cdot 2=-15-14=-29\neq 0$.

Question 8. *Soit le système*

$$\begin{cases} x+\lambda y=2\lambda \\ \lambda x+y=1+\lambda^2 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez le système en fonction de $\lambda\in\mathbb{R}$ et interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Calculons le déterminant du système. On a $\left|\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right|=1-\lambda^2=(1-\lambda)(1+\lambda)$. Le déterminant s'annule donc en $\lambda=1$ et en $\lambda=-1$. Dès lors, trois cas sont à discuter :

(a) Si $\lambda=1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2. \end{cases}$$

L'équation $x+y=2$ s'écrit encore $y=2-x$. L'ensemble des solutions est donc

$$\big\{(\alpha,2-\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\big\}.$$

Géométriquement, les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

(b) Si $\lambda=-1$, le système d'écrit

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ -x+y=2, \end{cases}$$

ou encore (en multipliant la deuxième équation par -1)

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x-y=-2. \end{cases}$$

L'équation $x-y=-2$ s'écrit également $x=-2+y$. L'ensemble des solutions est donc

$$\big\{(-2+\alpha,\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\big\}.$$

Géométriquement, l'interprétation est identique au cas précédent. Les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

(c) Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$, le système a alors une solution unique donnée par les formules de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1+\lambda^2 & 1 \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{2\lambda - \lambda - \lambda^3}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{\lambda - \lambda^3}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{\lambda(1-\lambda^2)}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ \lambda & 1+\lambda^2 \end{vmatrix}}{(1-\lambda)(1+\lambda)} = \frac{1+\lambda^2-2\lambda^2}{1-\lambda^2} = \frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2} = 1$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\{(\lambda,1)\}$. Géométriquement, les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent au point $(\lambda,1)$.

Question 9. *Montrez que, quel que soit $n \geqslant 1$, on a $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.*

- Cas de base : $n=1$.
  Premier membre : $1^2+2^2+\cdots+n^2 = 1^2 = 1$.
  Second membre : $n(n+1)(2n+1)/6 = 1\cdot 2\cdot 3/6 = 1$. Nous avons donc bien l'égalité souhaitée.
- Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie pour tout n tel que $1 \leq n \leq k$ où $k \geq 1$. Montrons que cette propriété est vérifiée pour $n = k+1$ c'est-à-dire

  $$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

  Par hypothèse de récurrence, c'est équivalent à dire

  $$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

  En faisant des manipulations élémentaires, on obtient que les égalités suivantes sont équivalentes :

  $$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2 &= (k+1)(k+2)(2k+3) \\ (k+1)(k(2k+1)+6k+6) &= (k+1)(k+2)(2k+3) \\ (k+1)(2k^2+k+6k+6) &= (k+1)(k+2)(2k+3) \\ (k+1)(2k^2+7k+6) &= (k+1)(2k^2+3k+4k+6). \end{aligned}$$

  La dernière égalité étant bien évidemment vraie, la propriété est vérifiée.