Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2011)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 + 2iX - 10 = 0$ où $i^2 = -1$. $/3$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez, si possible, /3

(a) $-\boldsymbol{i}\begin{pmatrix}(1-\boldsymbol{i})^2 & \boldsymbol{i}-2\\ \boldsymbol{i}^{-3} & 1\end{pmatrix}$ où $\boldsymbol{i}^2=-1$.

(b) $\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=$

(c) $\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}=$

Question 3. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Prouvez par récurrence que $\begin{pmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}x^n & \partial_x(x^n)\\ 0 & x^n\end{pmatrix}$. /3

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ \lambda x = \lambda(y+z). \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit $A = (A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ la matrice définie par $A_{ij} = i^{j-1}$. /4

(a) Écrivez la matrice A. Détaillez vos calculs.

(b) Transformez la matrice A en une matrice échelonnée. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Pousuivez votre réponse sur cette page.

Question 6. /3

(a) Donnez la table de vérité de $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$.

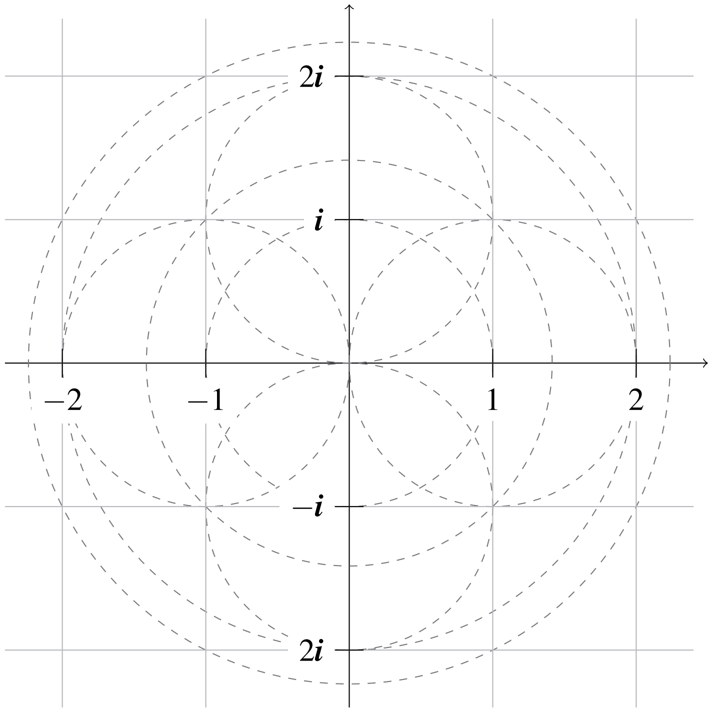
(b) Prouvez que la proposition $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ est équivalente à $q \Rightarrow p$.

Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$. Représentez les solutions sur le graphique ci-dessous et donnez ces solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. /6



Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2011)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ en $x = 1$. $/3$

Question 9. Déterminez le ou les $\tau \in \mathbb{R}$ pour lesquels la droite tangente à l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\mathrm{e}^{t^2}, \ln\sqrt{1+t})$ en $f(\tau)$ est perpendiculaire au vecteur $(1, \mathrm{e}^{\tau^2})$. $/3$