Mathématique Élémentaire

Test n° 5 (17 octobre 2011) **Correction**

Question 1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $X^2 + 2\boldsymbol{i}X - 10 = 0$ *où* $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Le discriminant Δ vaut $(2\boldsymbol{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 36$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 36$. Ses solutions sont $y_1 = -6$ et $y_2 = 6$. Par conséquent, les solutions de l'équation $X^2 + 2\boldsymbol{i}X - 10 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-2\boldsymbol{i}-6}{2} = -\boldsymbol{i}-3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2\boldsymbol{i}+6}{2} = -\boldsymbol{i}+3.$$

Question 2. *Calculez, si possible,*

(a) $-\boldsymbol{i}\begin{pmatrix}(1-\boldsymbol{i})^2 & \boldsymbol{i}-2\\ \boldsymbol{i}^{-3} & 1\end{pmatrix}$ *où* $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

$$= \begin{pmatrix}-\boldsymbol{i}(1-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2) & \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i}-2)\\ -\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}^{-3} & -\boldsymbol{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\boldsymbol{i}(-2\boldsymbol{i}) & -\boldsymbol{i}^2+2\boldsymbol{i}\\ -\boldsymbol{i}^{-2} & -\boldsymbol{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1+2\boldsymbol{i}\\ 1 & -\boldsymbol{i}\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot(-1)-2\cdot(-2)+0\cdot(-3)\\ 2\cdot(-1)-1\cdot(-2)+5\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+4+0\\ -2+2-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -15\end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Il n'est pas possible de calculer ce produit car le nombre de colonnes de la première matrice n'est pas égal au nombre de lignes de la seconde.

Question 3. *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prouvez par récurrence que* $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & \partial_x(x^n) \\ 0 & x^n \end{pmatrix}$.

Cas de base : $n = 1$.
Le premier membre devient $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.
Le second membre devient $\begin{pmatrix} x^1 & \partial_x x^1 \\ 0 & x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.
Les deux membres sont bien égaux.

Hypothèse de récurrence : on suppose que la propriété soit vraie pour tout $n \leqslant k$, où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrons la pour $n = k+1$, c'est-à-dire, montrons $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & \partial_x x^{k+1} \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} && \text{(Règle des exposants)} \\
&= \begin{pmatrix} x^k & \partial_x x^k \\ 0 & x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} && \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= \begin{pmatrix} x^k x + 0 & x^k + (\partial_x x^k)x \\ 0 & x^k x \end{pmatrix} && \text{(Définition du produit matriciel)} \\
&= \begin{pmatrix} x^{k+1} & x^k + k x^{k-1} x \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix} && \text{(Règle de dérivation)} \\
&= \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^k \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^{k+1} & \partial_x x^{k+1} \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 4. *Soit le système*

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ \lambda x = \lambda(y+z). \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel. Résolvez ce système en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et interprétez géométriquement les résultats obtenus.

Supposons tout d'abord $\lambda \neq 0$. On peut alors simplifier par λ dans la deuxième équation et le système devient

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, & (1) \\ x - y - z = 0. & (2) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), on a $4x - 3y = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{4}y$. En remplaçant dans (2), on a $z = x - y = \frac{3}{4}y - y = -\frac{1}{4}y$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \left(\tfrac{3}{4}\lambda, \lambda, -\tfrac{1}{4}\lambda\right), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Cet ensemble décrit la droite passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur directeur est $(\frac{3}{4}, 1, -\frac{1}{4})$.

Si $\lambda = 0$, le système se réduit à l'équation $3x - 2y + z = 0$, c'est-à-dire $z = -3x + 2y$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{(\lambda, \mu, -3\lambda + 2\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Il s'agit du plan passant par $(0,0,0)$ et dont un vecteur normal est $(3,-2,1)$.

Question 5. *Soit $A = (A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$ la matrice définie par $A_{ij} = i^{j-1}$.*

(a) *Écrivez la matrice A. Détaillez vos calculs.*

(b) *Transformez la matrice A en une matrice échelonnée. Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.*

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1^{1-1} & 1^{2-1} & 1^{3-1} & 1^{4-1} \\ 2^{1-1} & 2^{2-1} & 2^{3-1} & 2^{4-1} \\ 3^{1-1} & 3^{2-1} & 3^{3-1} & 3^{4-1} \\ 4^{1-1} & 4^{2-1} & 4^{3-1} & 4^{4-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}.$$

(b) Appliquons des transformations élémentaires sur les lignes de la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & 21 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4/3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{matrix}$$

Cette dernière matrice est bien une matrice échelonnée.

Question 6.

(a) *Donnez la table de vérité de $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$.*

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$	$q \Rightarrow p$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

(b) *Prouvez que la proposition $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ est équivalente à $q \Rightarrow p$.*

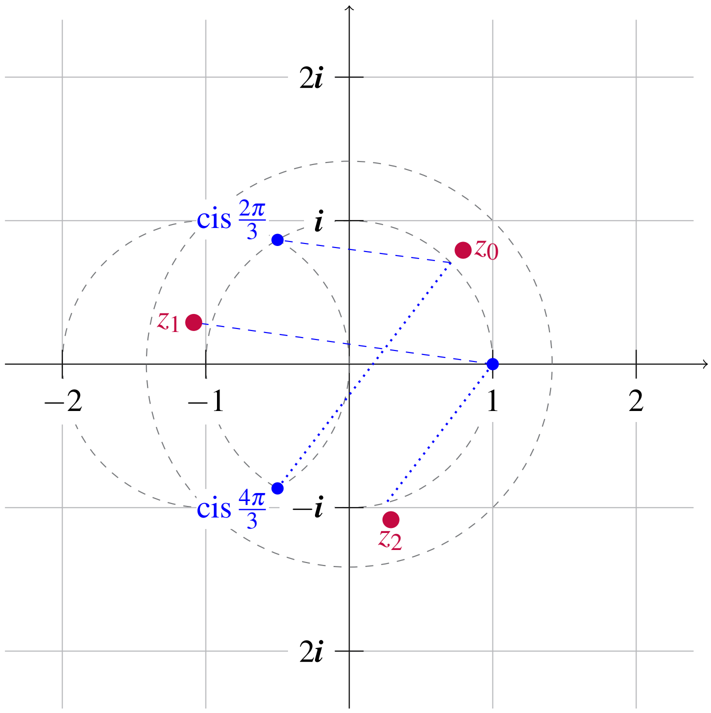
La comparaison des deux dernières colonnes de la table ci-dessus montre que les valeurs de vérité de $(\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ et de $q \Rightarrow p$ sont les mêmes quelles que soient les valeurs de vérité de p et q. Ces deux propositions sont donc bien équivalentes.

Question 7. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$. Représentez les solutions sur le graphique ci-dessous et donnez ces solutions à la fois sous forme trigonométrique et sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

Résoudre l'équation $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$ revient à résoudre $X^3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$ vu que $-1+\boldsymbol{i} = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, une solution particulière de $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$ est $(\sqrt{2})^{1/3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$. En effet, par la formule de De Moivre :

$$\Big((\sqrt{2})^{1/3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\Big)^3 = \sqrt{2}\Big(\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\Big)^3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}.$$

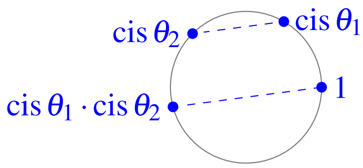
Donc, par la théorie vue au cours, les solutions de $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$ sont de la forme $(\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}) \cdot u$ avec $u^3 = 1$, c'est-à-dire $\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, et $\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$. Donc, les solutions sous forme trigonométrique sont



$$z_0 := \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}, \qquad z_1 := \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}, \qquad z_2 := \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{12},$$

car $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2 = \operatorname{cis}\big((\theta_1+\theta_2) \bmod 2\pi\big)$.

La représentation graphique s'obtient en rappelant que $\operatorname{cis}\theta_1 \cdot \operatorname{cis}\theta_2$ peut être construit par la « règle du parallélisme » illustrée ci-dessous.



D'autre part $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}1$. (En effet, $(1{,}1)^2 = 1{,}21$; donc $(1{,}1)^6 = \big((1{,}1)^2\big)^3 = (1{,}21)^3 = (1{,}21)^2 \cdot 1{,}21 \approx 1{,}46 \cdot 1{,}21 \approx 1{,}75$. Mais $(1{,}2)^6 = (1{,}44)^3 > (1{,}44)^2 \approx 2$.)

La forme algébrique des solutions est fournie en rappelant que, sous forme algébrique, les solutions u de $X^3 = 1$ sont :

$$1, \qquad -\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $X^3 = -1 + \boldsymbol{i}$ sont

- $z_0 = \sqrt[6]{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\big)$ (vu que $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$),
- $z_1 = \sqrt[6]{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\big)\big(-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$, et
- $z_2 = \sqrt[6]{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\big)\big(-\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.

Après calculs, cela donne

- $z_0 = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} + \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\boldsymbol{i} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+\boldsymbol{i})$,
- $z_1 = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+\boldsymbol{i})\Big(-\dfrac{1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt{3}+1) + \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt{3}-1)\boldsymbol{i}$, et
- $z_2 = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+\boldsymbol{i})\Big(-\dfrac{1}{2} - \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt{3}-1) - \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(\sqrt{3}+1)\boldsymbol{i}$.

Question 8. *Donnez une équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ en $x = 1$.*

Appelons f la fonction de l'énoncé. Une équation cartésienne de la tangente demandée est $y = f(1) + \partial_x f(1)(x-1)$. On a $f(1) = \sqrt{1}/(1+1) = 1/2$. Par ailleurs,

$$\partial_x f(x) = \frac{\partial_x\sqrt{x}(1+x) - \sqrt{x}\partial_x(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

si bien que $\partial_x f(1) = 0$. Il s'ensuit que l'équation de la tangente ci-dessus devient $y = 1/2$.

Question 9. *Déterminez le ou les* $\tau \in \mathbb{R}$ *pour lesquels la droite tangente à l'image de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\mathrm{e}^{t^2}, \ln\sqrt{1+t})$ *en* $f(\tau)$ *est perpendiculaire au vecteur* $(1, \mathrm{e}^{\tau^2})$.

Rappelons qu'un vecteur directeur de la tangente en $f(\tau)$ est donné par $\partial_t f(\tau) \in \mathbb{R}^2$. Dès lors, la tangente sera perpendiculaire à $(1, \mathrm{e}^{\tau^2})$ si et seulement si

$$\bigl(\partial_t f(\tau) \bigm| (1, \mathrm{e}^{\tau^2})\bigr) = 0. \tag{3}$$

Vu que $\partial_t f(t) = \bigl(2t\,\mathrm{e}^{t^2}, \frac{1}{2(1+t)}\bigr)$, l'équation (3) sera satisfaite si et seulement si

$$2\tau\,\mathrm{e}^{\tau^2} + \frac{\mathrm{e}^{\tau^2}}{2(1+\tau)} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$2\tau + \frac{1}{2+2\tau} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$(2\tau+1)^2 = 4\tau^2 + 4\tau + 1 = 0.$$

Le seul τ qui satisfait les demandes de l'énoncé est[1] $\tau = -1/2$.

[1] Remarquons que $-1/2 \in \operatorname{Dom} f = \left]-1, +\infty\right[$.