Mathématique Élémentaire

Test n° 6 (24 octobre 2011)

Correction

Question 1. *Donnez, en bon français, la contraposée de la phrase « si je rate ma session en juin, alors je ne prendrai pas de vacances en août ».*

En notant P (resp. Q) la proposition « je rate ma session en juin » (resp. « je ne prendrai pas de vacances en août »), on voit que la phrase de l'énoncé est du type $P \Rightarrow Q$. La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$, c'est-à-dire, en français : « Si je prends des vacances en août, alors j'avais réussi ma session en juin ».

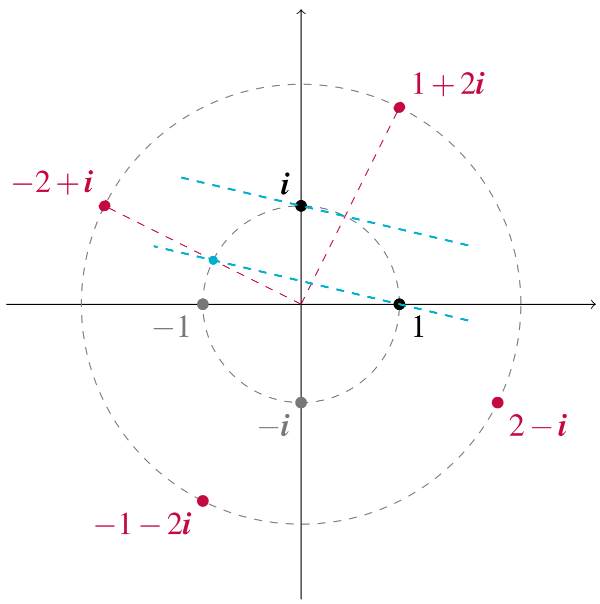
Question 2. *Calculez* $(1+2\boldsymbol{i})^4$.

On a $(1+2\boldsymbol{i})^4 = \big((1+2\boldsymbol{i})^2\big)^2 = (1+4\boldsymbol{i}^2+4\boldsymbol{i})^2 = (-3+4\boldsymbol{i})^2 = 9+16\boldsymbol{i}^2-24\boldsymbol{i} = -7-24\boldsymbol{i}$.

Question 3. *Donnez, sous la forme $a+b\boldsymbol{i}$, toutes les solutions complexes de l'équation $X^4 = -7-24\boldsymbol{i}$. Donnez leur position dans le plan complexe en utilisant la « règle des parallèles » pour positionner* $\operatorname{cis}\theta \cdot \operatorname{cis}\theta'$ *sur le cercle unité.*

Par le calcul effectué à la question précédente, on sait que $1+2\boldsymbol{i}$ est une solution de l'équation. Notons la z_0. Par un résultat vu en cours, l'ensemble des solutions de $X^4 = -7-24\boldsymbol{i}$ est $\{u.z_0 : u^4 = 1\}$. On sait également que les complexes u tels que $u^4 = 1$ sont exactement $1, \boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i}$.
Les solutions de l'équation $X^4 = -7-24\boldsymbol{i}$ sont donc :

- $z_1 = (1+2\boldsymbol{i})\cdot 1 = 1+2\boldsymbol{i}$,
- $z_2 = (1+2\boldsymbol{i})\cdot \boldsymbol{i} = -2+\boldsymbol{i}$,
- $z_3 = (1+2\boldsymbol{i})\cdot(-1) = -z_1$,
- $z_4 = (1+2\boldsymbol{i})\cdot(-\boldsymbol{i}) = -z_2$.



Question 4.

(a) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice antisymétrique. Montrez que, quel que soit $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $A_{ii} = 0$.*

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Puisque A est antisymétrique, c'est-à-dire $A^t = -A$, on a $A^t_{ii} = -A_{ii}$, ce qui revient à $A_{ii} = -A_{ii}$ ou encore à $2A_{ii} = 0$. On en déduit que $A_{ii} = 0$.

(b) *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice définie par*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 - j^2 + A_{ij})$. Expliquez votre démarche.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 - j^2 + A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 - j^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

Considérons la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $M_{ij} = i^2 - j^2$. Cette matrice est antisymétrique. En effet, soient $i, j \in \{1,\dots,n\}$, on a $M^t_{ij} = M_{ji} = j^2 - i^2 = -(i^2 - j^2) = -M_{ij}$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2 - j^2) = 0$. En effet, calculer cette double somme revient à additionner tous les éléments de M. D'autre part, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = n\cdot(n-1) = n^2 - n$ car n est le nombre de lignes de la matrice A et $n-1$ est le nombre de fois que 1 apparaît sur chaque ligne.

Question 5. *Déterminez le ou les $\tau \in \mathbb{R}^{>0}$ tels que la tangente à l'image de la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\sqrt[3]{t}, \mathrm{e}^{\sqrt{t}})$ au point $\gamma(\tau)$ passe par le point $(0,0)$.*

Rappelons nous qu'une équation paramétrique de la tangente à l'*image* de γ en $\gamma(\tau)$ est

$$(x,y) = \gamma(\tau) + \lambda\, \partial\gamma(\tau), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On calcule aisément que $\partial\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}t^{-2/3}, \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$. Par conséquent, l'équation (1) devient

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\tau} + \lambda \frac{1}{3}\tau^{-2/3} \\ y = \mathrm{e}^{\sqrt{\tau}} + \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Le point $(0,0)$ appartiendra à la droite d'équation (2) si et seulement si, lorsqu'on remplace x et y par 0 dans (2), il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les deux équations soient satisfaites. Par conséquent, la question demande de chercher le(s) $\tau > 0$ tel(s) que

$$0 = \sqrt[3]{\tau} + \lambda \tfrac{1}{3}\tau^{-2/3} \quad \text{et} \quad 0 = \mathrm{e}^{\sqrt{\tau}} + \lambda\, \mathrm{e}^{\sqrt{\tau}} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \qquad \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R}.$$

De la seconde équation, on tire que, nécessairement, $\lambda = -2\sqrt{t}$. Dès lors, la première équation devient $0 = \sqrt[3]{\tau} - 2\tau^{1/2}\frac{1}{3}\tau^{-2/3}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{\tau} = \frac{2}{3}\tau^{1/2-2/3} = \frac{2}{3}\tau^{-1/6}$ ou encore, en multipliant les deux membres par $\tau^{1/6}$, $\tau^{1/2} = \tau^{1/3+1/6} = \sqrt[3]{\tau}\,\tau^{1/6} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, le seul τ qui répond à la question est $\tau = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Question 6. *Calculez $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.*

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x && \text{(intégrant de la forme } \sin u \cdot \partial_x u\text{)} \\ &= -2\cos\sqrt{x}\Big]_{\pi/2}^{\pi} && \text{(intégration par substitution)} \\ &= -2\cos\sqrt{\pi} + 2\cos\sqrt{\pi/2} \end{aligned}$$

Question 7. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$(A_1A_2\cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t.$$

Pour rappel, si $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, A^t désigne la transposée de A.

Voir correction du test 5, 15 octobre 2007, question 3.

Question 8. *Soit $z_1 = a_1 + \boldsymbol{i} b_1$ et $z_2 = a_2 + \boldsymbol{i} b_2$. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite du plan complexe passant par z_1 et z_2 en fonction de a_1, b_1, a_2, b_2.*

z_1 désigne le point (a_1, a_2) dans le plan complexe, de même z_2 désigne le point (a_2, b_2). Il s'agit donc de donner la pente (notons-la m) de la droite passant par (a_1, b_1) et (a_2, b_2). Par conséquent, si $a_1 \neq a_2$, $m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$. Si $a_1 = a_2$, la pente n'existe pas car la droite est verticale d'équation $x = a_1$.

Question 9. *Trouvez la matrice M dont l'inverse est*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Par définition de l'inverse, on a $M \cdot M^{-1} = \mathrm{Id} = M^{-1} \cdot M$. On en déduit que M est l'inverse de M^{-1}. Calculons l'inverse de M^{-1} par la méthode de la matrice compagnon.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2/4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

Question 10. *Calculez les sommes suivantes.*

(a) *Soit $t \geqslant 1$,* $\displaystyle\sum_{k=-5}^{t} \mathrm{e} = \sum_{k=-5}^{0} \mathrm{e} + \sum_{k=1}^{t} \mathrm{e} = 6 \cdot \mathrm{e} + t \cdot \mathrm{e} = e(t+6).$

(b) *Soit $\ell \geqslant 7$, par les formules du cours, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{j=7}^{\ell} (j+n) = \sum_{j=7}^{\ell} j + \sum_{j=7}^{\ell} n = \sum_{j=0}^{\ell} j - \sum_{j=0}^{6} j + \sum_{j=7}^{\ell} n \\ = \frac{\ell \cdot (\ell+1)}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} + n \cdot (\ell - 6) \\ = n \cdot (\ell - 6) + \frac{\ell \cdot (\ell+1)}{2} - 21. \end{aligned}$$

Question 11. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 - 4X + 4 - 2\boldsymbol{i} = 0$.*

Par définition, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - 2\boldsymbol{i}) = 16 - 16 + 8\boldsymbol{i} = 8\boldsymbol{i}$. L'équation auxiliaire est donc $Y^2 = 8\boldsymbol{i}$ dont les solutions y_1, y_2 sont respectivement $2\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ et $-2\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire

$$y_1 = 2\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 2(1 + \boldsymbol{i}) \quad \text{et} \quad y_2 = -2\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -2(1 + \boldsymbol{i}).$$

Donc les solutions de l'équation $X^2 - 4X + (4 - 2\boldsymbol{i}) = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-(-4) + y_1}{2} = 2 + (1 + \boldsymbol{i}) = 3 + \boldsymbol{i} \qquad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + y_2}{2} = 2 + (-1 - \boldsymbol{i}) = 1 - \boldsymbol{i}.$$