

# Mathématique Élémentaire

## Examen

(29 octobre 2012)

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Veillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez

■  $(3 + i) - (17 - 27i) =$

■  $|1 + 2i| =$

■  $|(1 + 2i)^{14}| =$

■  $\text{Arg } 4 =$

Question 2. Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse.

/4

/2

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Prouvez par récurrence que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\left(\sum_{i=0}^n i\right)^2 = \sum_{i=0}^n i^3$ .

/3

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

/5

Question 4. Calculez les sommes suivantes (on suppose  $n \geq 2$ ) :

■  $\sum_{t=2}^n t =$

■  $\sum_{t=2}^n (t + (-1)^t) =$

■  $\sum_{j=-1}^5 j^3 =$

■  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((i-j)(i^2 + j^2) + j) =$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 5. Calculez

/3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a-\lambda & a & a \\ b & b-\lambda & b \\ c & c & c-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{où } a+b+c=2\lambda.$$

Question 6. Calculez en détaillant les étapes :

/4

■  $\partial_z(\log(\cos(e^{z+\text{arctg}z}))) =$

■  $\partial_t\left(\sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k}\right) =$

Question 7. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel.

- (a) Calculez l'inverse de  $M$  en fonction de  $\lambda$ , en discutant si nécessaire. Expliquez votre démarche.
- (b) Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$$

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 8. La proposition  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)))$  est-elle une tautologie ?

/2

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 9. Écrivez le domaine de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x - 2 - \frac{2\sqrt{9 - 3x}}{x + 3}}$  sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).

/ 8

# Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2012)

---

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 9 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.



Question 9 (suite). Poursuivez si nécessaire votre réponse sur cette page.

Question 10. Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel  $m$  :

/5

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \\ x + 2y = m - 1 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

# Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2012)

---

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Section : \_\_\_\_\_

Question 11. Esquissez le graphe des fonctions suivantes. Justifiez votre démarche. L'évaluation de chaque fonction en *au plus deux* points peut être utilisée dans les justifications. Toute justification faisant intervenir les dérivées sera considérée comme nulle.

/6

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x} + x.$$

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 12. Résolvez l'équation suivante dans  $\mathbb{C}$  :  $X^6 = -27$ . Détaillez votre méthode. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et algébrique. Représentez ces solutions dans le plan.

/8

