Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2012)

Correction

Question 1. *Calculez*

- $(3+\boldsymbol{i}) - (17-27\boldsymbol{i}) = -14+28\boldsymbol{i}$
- $|1+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$
- $|(1+2\boldsymbol{i})^{14}| = |1+2\boldsymbol{i}|^{14} = (\sqrt{5})^{14} = 5^7$ où la première égalité utilise l'identité $|z^n| = |z|^n$.
- $\operatorname{Arg} 4 = 0$ *car* $4 \in \mathbb{R}^+$.

Question 2. *Donnez en bon français la négation de « Si je vais en vacances, alors j'apprends l'anglais ». Justifiez votre réponse.*

Il s'agit d'une phrase du type $A \Rightarrow B$ avec A qui est « je vais en vacances » et B qui vaut « j'apprends l'anglais ». Sa négation est $A \wedge \neg B$ ou, en français, « je vais en vacances et je n'apprends pas l'anglais ».

Question 3. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3$.*

Considérons le cas de base $n = 0$, nous avons bien que $\left(\sum_{i=0}^{0} i\right)^2 = 0 = \sum_{i=0}^{0} i^3$.

Comme hypothèse de récurrence, admettons que l'assertion soit vraie pour tout n entre 0 et une valeur $k \geqslant 0$ fixée et prouvons que l'assertion reste vraie pour $n = k+1$.

Nous devons donc montrer que $\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{k+1} i^3$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^{k} i + (k+1)\right)^2 && \text{(déf. de la somme)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2 + 2\sum_{i=0}^{k} i(k+1) + (k+1)^2 && \big((a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} i^3 + 2\sum_{i=0}^{k} i(k+1) + (k+1)^2 && \text{(hyp. de récurrence)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} i^3 + 2(k+1)\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 && \text{(formule du cours)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^2(k+1) && \text{(mise en évidence)} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} i^3 && \text{(déf. de la somme)}
\end{aligned}
$$

ce qui conclut notre preuve.

Question 4. *Calculez les sommes suivantes (on suppose $n \geqslant 2$) :*

- $\displaystyle\sum_{t=2}^{n} t = \sum_{t=0}^{n} t - \sum_{t=0}^{1} t = \frac{n(n+1)}{2} - 1$
- $\displaystyle\sum_{t=2}^{n} \big(t + (-1)^t\big) = \sum_{t=2}^{n} t + \sum_{t=2}^{n} (-1)^t.$

  Comme $\sum_{t=2}^{n}(-1)^t = 1$ si n est pair et 0 sinon, nous obtenons $\frac{n(n+1)}{2}$ si n pair et $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ sinon.

- $$\begin{aligned}\sum_{j=-1}^{5} j^3 &= (-1)^3 + \sum_{j=0}^{5} j^3 \\ &= -1 + \Big(\sum_{j=0}^{5} j\Big)^2 && \text{(par la question précédente)} \\ &= -1 + \Big(\frac{5\cdot 6}{2}\Big)^2 = 15^2 - 1 = 224.\end{aligned}$$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big((i-j)(i^2+j^2)+j\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$

  car on remarque que $(i-j)(i^2+j^2) = -(j-i)(j^2+i^2)$ et donc la somme $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big((i-j)(i^2+j^2)\big)$ consiste à sommer tous les éléments d'une matrice antisymétrique et est par conséquent nulle.

Question 5. *Calculez*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad et \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a-\lambda & a & a \\ b & b-\lambda & b \\ c & c & c-\lambda \end{vmatrix} \text{ où } a+b+c = 2\lambda.$$

Pour D_1, on a vu que le déterminant d'une matrice triangulaire vaut le produit des éléments situés sur la diagonale principale. Donc $D_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 7 = 42$. Développons D_2 suivant la première ligne. On obtient que le déterminant vaut

$$\begin{aligned}&(a-\lambda)\big((b-\lambda)\cdot(c-\lambda)-bc\big) - a\big(b(c-\lambda)-bc\big) + a\big(bc - c(b-\lambda)\big) \\ &= (a-\lambda)(bc - b\lambda - \lambda c + \lambda^2 - bc) - a(bc - b\lambda - bc) + a(bc + c\lambda - bc) \\ &= (a-\lambda)(-b\lambda - \lambda c + \lambda^2) + ab\lambda + ac\lambda \\ &= -ab\lambda - ac\lambda + a\lambda^2 + b\lambda^2 + c\lambda^2 - \lambda^3 + ab\lambda + ac\lambda \\ &= \lambda^2(a+b+c) - \lambda^3 \\ &= \lambda^2\cdot 2\lambda - \lambda^3 \\ &= \lambda^3.\end{aligned}$$

Question 6. *Calculez en détaillant les étapes :*

- $\partial_z\big(\log(\cos(\mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z}))\big)$
  $= \big(\partial_u \log u\big)\big|_{u=\cos(\mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z})} \cdot \big(\partial_v \cos v\big)\big|_{v=\mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z}} \cdot \big(\partial_w \mathrm{e}^w\big)\big|_{w=z+\operatorname{arctg} z} \cdot \partial_z(z+\operatorname{arctg} z)$
  $= \frac{1}{\cos(\mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z})} \cdot \big(-\sin(\mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z})\big) \cdot \mathrm{e}^{z+\operatorname{arctg} z} \cdot \big(1+\frac{1}{1+z^2}\big)$
  (On rappelle que « log » et « ln » sont deux notations pour le logarithme Népérien, le logarithme en base 10 étant noté « Log » ou « $\log_{10}$ ».)
- $\partial_t\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} t^l = \frac{t^n-1}{t-1}$

Question 7. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) *Calculez l'inverse de M en fonction de λ, en discutant si nécessaire. Expliquez votre démarche.*

(b) *Résolvez le système suivant en expliquant votre démarche :*

$$\begin{cases} x+y-z=10 \\ x+10z=10 \\ x+y+9z=20 \end{cases}$$

Voir correction du test 6 du 22 octobre 2007 (question 9).

Question 8. *La proposition $P \Rightarrow \big(Q \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))\big)$ est-elle une tautologie ?*

La proposition est de la forme $P \Rightarrow B$ qui est équivalente à $\neg P \vee B$ où B est elle-même de la forme $Q \Rightarrow C$ équivalente à $\neg Q \vee C$. On a aussi que C est de la forme $P \Rightarrow D$ c'est-à-dire $\neg P \vee D$.
Donc, finalement, on a

$$\begin{aligned} A &:= \neg P \vee \big(\neg Q \vee (\neg P \vee D)\big) \\ &\equiv \neg P \vee \big(\neg Q \vee (\neg P \vee (\neg Q \vee P))\big) \\ &\equiv \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee \neg Q \vee P \\ &\equiv \neg P \vee P \vee \neg Q \end{aligned}$$

et puisque $\neg P \vee P$ est toujours vraie et que A est une disjonction, A est toujours vraie et est donc une tautologie.

REMARQUE : Il est bien entendu aussi possible de procéder à l'aide des tables de vérité.

Question 9. *Écrivez le domaine de la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sqrt{x-2-\dfrac{2\sqrt{9-3x}}{x+3}}$ *sous la forme d'une union disjointe d'intervalles (moins il y en a, mieux c'est).*

Les conditions pour que $f(x)$ ait un sens sont

- $x+3\neq 0$ car il est au dénominateur ;
- $9-3x\geqslant 0$ car $9-3x$ est sous un symbole de racine carrée ;
- $x-2-\frac{2\sqrt{9-3x}}{x+3}\geqslant 0$ car cette expression est l'argument d'une racine carrée.

Les deux premières conditions disent $x\in\,]-\infty,3]\setminus\{-3\}$. La dernière se réécrit

$$x-2\geqslant\frac{2\sqrt{9-3x}}{x+3}. \tag{1}$$

Discutons en fonction du signe de $x+3$.

- Si $x+3>0$ c'est-à-dire si $x\in\,]-3,3]$ vu les autres conditions d'existence, alors (1) devient

  $$(x-2)(x+3)\geqslant 2\sqrt{9-3x}.$$

  Si $x-2<0$ le membre de gauche est négatif et donc l'inégalité n'a pas de solution parmi ces x. Reste à chercher les solutions pour lesquelles $x-2\geqslant 0$, c'est-à-dire $x\in[2,3]$ vu les conditions précédentes. Pour ces x, les deux membres de l'inéquation sont positifs et donc celle-ci est équivalente à l'inéquation formée de l'élévation au carré de ces deux termes :

  $$(x-2)^2(x+3)^2\geqslant 4(9-3x).$$

  (Le sens de l'inégalité est conservé car la fonction $s\mapsto s^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.) Après développement du membre de gauche et simplification des termes communs avec le membre de droite, on trouve que cette inéquation se réduit à

  $$x^4+2x^3-11x^2\geqslant 0$$

  ou encore

  $$x^2(x^2+2x-11)\geqslant 0.$$

  Comme on travaille sous la condition $x\in[2,3]$, cela revient à déterminer les x tels que $x^2+2x-11\geqslant 0$. Ces x se trouvent à l'extérieur des racines du polynôme (vu que le coefficient de x^2 est positif) : $x\in\,]-\infty,-1-2\sqrt{3}]\cup[-1+2\sqrt{3},+\infty[$. Se rappelant qu'on travaille sous la condition $x\in[2,3]$, on trouve que les x solutions sont ceux qui appartiennent à

  $$\big(]-\infty,-1-2\sqrt{3}]\cup[-1+2\sqrt{3},+\infty[\big)\cap[2,3]=[-1+2\sqrt{3},3]$$

  (on vérifie facilement que $2<-1+2\sqrt{3}<3$).

- Si $x+3<0$ c'est-à-dire si $x\in\,]-\infty,-3[$, l'inéquation (1) se réduit à

  $$(x-2)(x+3)\leqslant 2\sqrt{9-3x}.$$

Comme $x < -3$, on a forcément que $x-2 < 0$ et donc $(x-2)(x+3) > 0$. Par conséquent, on peut élever les deux membres de l'inégalité et obtenir une inégalité équivalente. Après les mêmes calculs qu'au premier point, on trouve qu'il faut résoudre

$$x^2(x^2+2x-11) \leqslant 0.$$

Les solutions sont donc $x \in [-1-2\sqrt{3}, -1+2\sqrt{3}]$. Se rappelant qu'on travaille avec les $x < -3$ et réalisant que $-1-2\sqrt{3} < -3 < -1+2\sqrt{3}$, on conclut que les solutions pour ce cas sont les

$$x \in [-1-2\sqrt{3}, -3[.$$

En rassemblant les solutions trouvées dans les deux cas précédents, on a finalement que

$$\operatorname{Dom} f = [-1-2\sqrt{3}, -3[\cup [-1+2\sqrt{3}].$$

Question 10. *Résolvez le système suivant en fonction du paramètre réel m :*

$$\begin{cases} x+my = 1 \\ mx+y = 1 \\ x+2y = m-1 \end{cases}$$

Expliquez votre démarche.

Construisons la matrice augmentée du système : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{array}\right)$. Échelonnons cette matrice en lui appliquant des transformations élémentaires sur les lignes. On a, en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, que $[A|B] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \\ 0 & 2-m & m-2 \end{array}\right)$

- Supposons que $m \neq 1$ et $m \neq -1$. On a alors en effectuant $L_2 \leftarrow L_2/(1-m^2)$

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1/(1+m) \\ 0 & 2-m & m-2 \end{array}\right)$$

  où on a pu diviser la 2e ligne par $1-m^2$ car $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

  - Si $m \neq 2$ alors on a en effectuant $L_3 \leftarrow L_3/(2-m)$ que

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1/(1+m) \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

    Les deux dernières lignes disent $y = \frac{1}{1+m}$ et $y = -1$. Le système aura donc une solution si et seulement si $\frac{1}{1+m} = -1$, c'est-à-dire si $m = -2$. Dans ce cas, la première équation devient $x - 2y = 1$ c'est-à-dire $x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$. L'ensemble des solutions est alors $\{(-1, 1)\}$. Si $m \neq -2$ alors le système est impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

- ▸ Si $m = 2$ alors on a la matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. La deuxième ligne donne $y = 1/3$. La première ligne donne $x + 2y = 1$ c'est-à-dire $x = 1 - 2/3 = 1/3$. Donc l'ensemble des solutions est $\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.

- Supposons que $m = 1$. La matrice $[A|B]$ s'écrit alors

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La troisième ligne dit que $y = -1$. La première donne $x + y = 1$ c'est-à-dire $x = 2$. L'ensemble des solutions est ici $\{(2, -1)\}$.

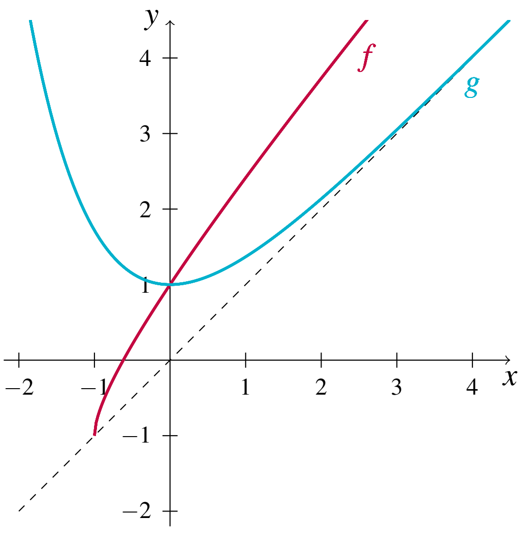
- Supposons que $m = -1$. La matrice $[A|B]$ devient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

La deuxième ligne dit que $0 = 2$. Le système est donc impossible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Question 11. *Esquissez le graphe des fonctions suivantes. Justifiez votre démarche. L'évaluation de chaque fonction en* au plus deux *points peut être utilisée dans les justifications. Toute justification faisant intervenir les dérivées sera considérée comme nulle.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \sqrt{1+x} \quad et \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x.$$

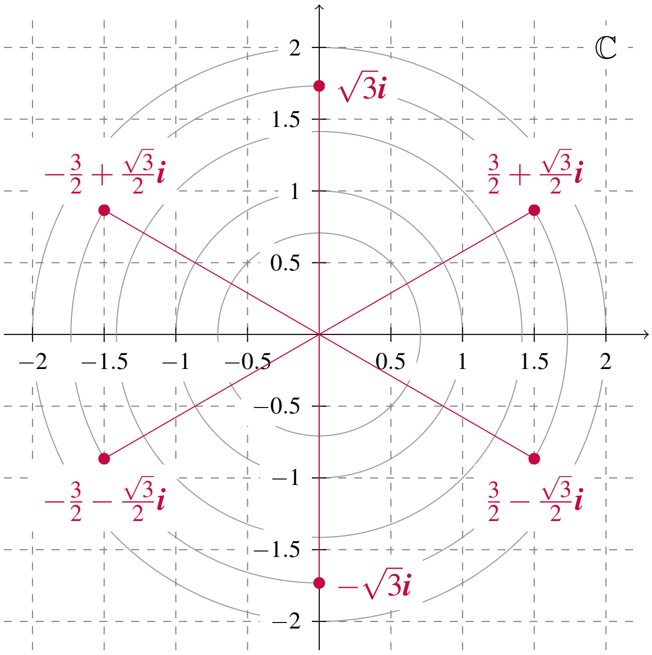


Vu la racine, la fonction f n'est définie que sur $[-1, +\infty[$. Lorsque $x \to +\infty$, $x + 1 \approx x$ et $\sqrt{x}$ est petit par rapport à x. Donc[1] $f(x) \approx x + \sqrt{x} \approx x$. Une autre manière d'arriver au même résultat est d'écrire $f(x) = x\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}\right) \approx x(1+0)$. Lorsque $x \approx -1$, $x + 1$ est petit devant $\sqrt{x+1}$. Par conséquent $f(x) = -1 + x + 1 + \sqrt{x+1} \approx -1 + \sqrt{x+1}$. Le graphe de la fonction $x \mapsto -1 + \sqrt{x+1}$ est celui de $x \mapsto \sqrt{x}$ translaté d'une unité vers la gauche et d'une unité vers le bas. Finalement, on calcule $f(0) = 1$. Ceci donne le graphe ci-dessus.

[1]Notez que le fait que $f(x) \approx x$ ne signifie pas que le graphe de f se rapproche de la droite $y = x$, ni même que $y = x$ est une asymptote oblique de f.

Pour la fonction g, on commence par remarquer qu'elle est définie sur tout $\mathbb{R}$. Lorsque $x \to +\infty$, $-x \to -\infty$ d'où $\mathrm{e}^{-x} \approx 0$. Donc $g(x) \approx x$. Lorsque $x \to -\infty$, e^{-x} est beaucoup plus grand que n'importe quel polynôme, en particulier que x. Dès lors[2] $g(x) \approx \mathrm{e}^{-x}$. Constatant de plus que $g(0) = 1$, on obtient le graphe ci-dessus.

Question 12. *Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $X^6 = -27$. Détaillez votre méthode. Donnez les solutions sous forme trigonométrique et algébrique. Représentez ces solutions dans le plan.*



On a que $-27 = 27 \operatorname{cis} \pi = 3^3 \operatorname{cis} \pi = (\sqrt{3})^6 \operatorname{cis} \pi$. Par conséquent une solution particulière de $X^6 = -27$ est donc $z_0 = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ puisque $z_0^6 = (\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6})^6 = 27 \operatorname{cis} \pi$. Par conséquent les solutions sont données (vu le théorème du cours) par les $z_0 u$ avec u solution de $X^6 = 1$, c'est-à-dire

- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$,
- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$,
- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$,
- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$,
- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \operatorname{cis} \pi$ et
- $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$.

C'est-à-dire $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$, $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$, $-\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ et $\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$.

Algébriquement, cela donne $\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $\sqrt{3}\boldsymbol{i}$, $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$, $-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ et $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$.

[2] Si on se rappelle qu'on a vu au cours que $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a que $g(x) \geqslant -x + 1 + x = 1 = g(0)$ et donc que $x = 0$ est un minimum de g. Cependant la dérivée de g a été utilisée au cours pour obtenir cette information. Sans employer celle-ci, il n'est pas facile de garantir que le minimum de g soit bien en $x = 0$.