Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez /5

- $\sum_{k=1}^{t} (3+k^2) =$

- $\sum_{k=1}^{t} \sum_{\ell=1}^{k} (1+k) =$

- $\sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} \big(n+(u-v)^3\big) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ /8

(a) Calculez A^2 et A^3.

(b) Donnez une formule pour A^n, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et prouvez-la par récurrence.

(c) Calculez $\sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$. Expliquez.

Mathématique Élémentaire

Examen (10 janvier 2013)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez, en détaillant les étapes : /4

- $\partial_x\Big(\operatorname{arctg}\big(\log(1+e^{x^2})\big)\Big) =$

- $\partial_t\Big(\dfrac{1-\cos(xt)}{1+\sin(xt)}\Big) =$

Question 4. Résolvez algébriquement l'inéquation $x^3 - x \leqslant |x|$. /4

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit le système

/7

$$\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda y+\lambda z=\lambda \\ x+\lambda y+z=2\lambda \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $\lambda = -4$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $\lambda = -4$.

(d) Résolvez le système en fonction de λ uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Pour tous les $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les égalités suivantes : /4

(a) $\overline{-z} = -\overline{z}$;

(b) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(c) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;

(d) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

- Prouvez uniquement l'égalité (c).
- Soit un polynôme $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. En utilisant (a), (b), (c) et (d), *prouvez* que *si* $z \in \mathbb{C}$ est une solution de $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, *alors* $\overline{z}$ est également solution de cette équation.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Expliquez brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète). /6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}, \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \sin x.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8.

/6

(a) Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Définissez « N est l'inverse de M ».

(b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Sous quelle condition la matrice A est-elle inversible ? Donnez alors l'inverse de A. Vérifiez votre réponse en utilisant le point précédent.

(c) Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice S est-elle égale à son inverse ? Expliquez votre démarche et détaillez vos calculs.

Nom :

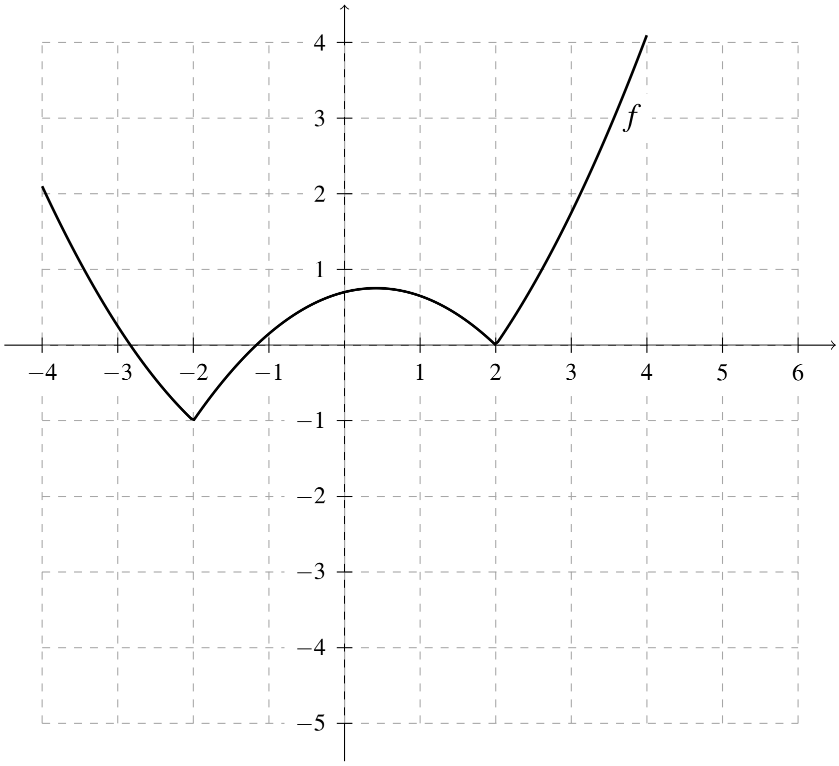
Prénom :

Section :

Question 9. Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur ce même dessin, tracez le graphe des fonctions /4

- $g : [-2,6] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x-2)$
- $h : [-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto -f(-x)-1$

Expliquez votre manière de procéder.



Nom :

Prénom :

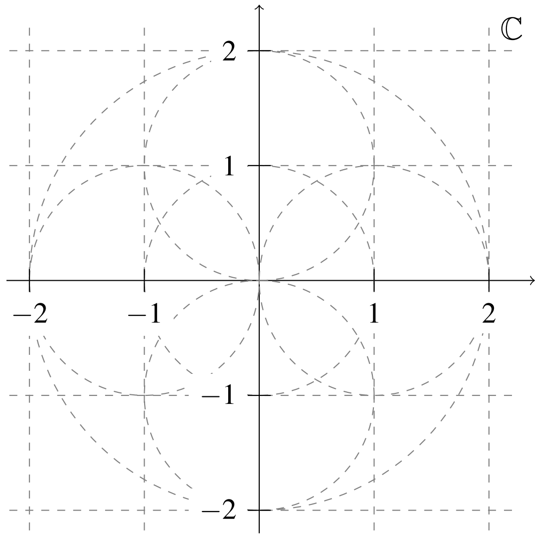
Section :

Question 10.

/12

(a) Donnez, sous forme trigonométrique, les nombres complexes $z_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

(b) Représentez ces nombres z_n dans le plan complexe (sur le graphique ci-contre) et *prouvez* une formule explicite pour la forme de z_n en fonction de n mod 8.



(c) Montrez que $3 - \boldsymbol{i}$ est solution de l'équation $Z^4 = 28 - 96\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez toutes les solutions complexes, sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, de l'équation $Z^4 = 28 - 96\boldsymbol{i}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 11. Soit A la proposition : « Si $p \in \mathbb{N}$ est premier, alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p - a$ est divisible par p ». $/4$

(a) Donnez (en bon français) la contraposée de la proposition A.

(b) Donnez (en bon français) la négation de la proposition A.