Mathématique Élémentaire

Examen (29 mai 2013)

Nom :
Prénom :
Section :

Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, ou PINFO) sur *toutes* les feuilles. Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.

Veuillez lire attentivement les conseils ci-dessous.

- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit *convaincre* le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à rédiger *soigneusement* vos réponses ; en particulier structurez-les clairement. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. /4

(a) Donnez la table de vérité de $A \vee (B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \wedge \neg C)$.

(b) Donnez, en bon français, la négation de la proposition suivante : « si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors $1+\sqrt{2}$ est rationnel ».

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez /3

- $\sum_{v=-3}^{j} v(v+2) =$

- $\sum_{k=0}^{t}\sum_{\ell=2}^{t}(k^2-\ell^2+1) =$

Question 3. Calculez /2

- $|-1-2\boldsymbol{i}| =$
- $\dfrac{5-2\boldsymbol{i}}{3-4\boldsymbol{i}} =$
- $|\boldsymbol{i}-3| =$
- $\overline{-7\boldsymbol{i}+5} =$
- $\left|(1+2\boldsymbol{i})^7(\boldsymbol{i}-3)^4\right|^2 =$

Nom :
Prénom :
Section :

/8

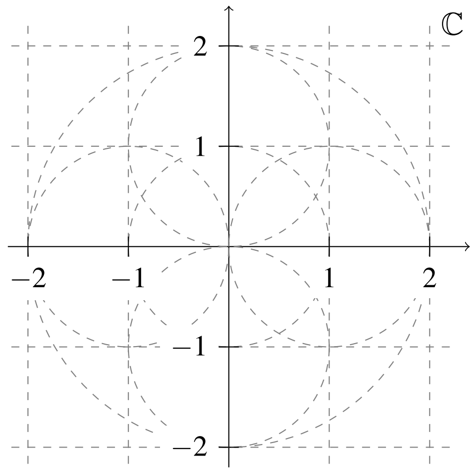
Question 4. Calculez $z_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^n$ pour $n \geqslant 0$.

(a) Donner une formule pour z_n en fonction de n mod 3.

(b) Représentez les z_n dans le plan complexe.

(c) Vérifiez que $(2+\boldsymbol{i})^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.

(d) Donnez les solutions complexes de $Z^3 = 2+11\boldsymbol{i}$.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/6

(a) Calculez $\sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}$

(b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Calculez $\sum_{n=1}^{k} M^n$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Esquissez les graphes des fonctions suivantes. Il est important d'expliquer brièvement les principales étapes qui mènent à vos graphiques (un tableau de valeurs n'est pas une justification complète). /6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}, \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1}{2}(-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3})$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3})$. /5

(a) Donnez la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Soit la matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

Calculez $M \cdot M$ et déduisez-en la matrice M^{-1}. Expliquez votre démarche.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 8. Calculez les déterminants suivants : /3

- dét $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- dét $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 9. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /4

$$f(x) = (x - \pi)^3 \, \mathrm{e}^{\sin x}$$

Trouvez tous les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $(x - \pi)\partial f(x) - 3f(x) = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ défini par

/7

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 4 \text{ et } |\sqrt{x}-1| \leqslant 1 \right\}$$

- A-t-on $0 \in A$? Justifiez.

- A-t-on $16 \in A$? Justifiez.

- Écrivez A sous la forme d'une union d'intervalles non-vides (éventuellement non-bornés) disjoints (moins il y en a, mieux c'est).

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Soit le système

/7

$$\begin{cases} (m+1)x + my + mz = m \\ x + my + z = 2m \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système possède-t-il une solution unique ?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice des coefficients du système. Calculez, si possible, l'inverse de A pour $m = -5$.

(c) En utilisant le point (b), donnez l'ensemble des solutions du système lorsque $m = -5$.

(d) Résolvez le système en fonction de m uniquement dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Les relations ci-dessous sont-elles des fonctions ? Lorsque vous répondez positivement, donnez le domaine et l'image de la fonction.

/5

(a) $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\rightarrow \mathscr{D} : (\beta, \gamma) \mapsto D$ tel que D est la droite d'équation $x + \beta y = \gamma$. Le symbole $\mathscr{D}$ représente l'ensemble des droites du plan de coordonnées (x, y).

(b) $g : \mathbb{C} \circ\!\!\rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto w$ tel que $w^3 = z$.